Systèmes hamiltoniens complètement intégrables associés aux surfaces K3

Arnaud Beauville

Symposia Mathematica **32**, 25-31; Academic Press (1991)

SYSTÈMES HAMILTONIENS COMPLÈTEMENT INTÉGRABLES ASSOCIÉS AUX SURFACES $K3$

A. BEAUVILLE

INTRODUCTION

Soient S une surface $K3, L$ un fibré en droites sur S. Nous supposerons dans la suite, pour simplifier, que *toutes les courbes du système linéaire* $|L|$ *sont intègres.* La famille des jacobiennes $(JC)_{C\in|L|}$ s'organise alors en une fibration $h_0 : \mathscr{T}_0 \longrightarrow |L|$, dont la fibre en $C \in |L|$ est JC. Cette fibration admet une compactification naturelle $h : \mathscr{T} \longrightarrow |L|$ [A-K]; la fibre de h en $C \in |L|$ est la compactification $\overline{JC}$ de JC qui paramètre les faisceaux sans torsion de rang un et de degré 0 sur la courbe intègre C. Si l'on pose $g = 1 + \frac{1}{2}(L)^2$, on a $\dim|L| = g(C) = g$ et $\dim\mathscr{T} = 2g$.

Mukai observe dans [M] que la variété projective $\mathscr{T}$ est lisse et admet une *structure symplectique*, c'est-à-dire une 2-forme holomorphe non dégénérée en tout point. Nous montrons dans cette note que la fibration $h : \mathscr{T} \longrightarrow |L|$ est *lagrangienne*, c'est-à-dire que ses fibres (ou au moins leur partie lisse) sont des sous-variétés lagrangiennes de la variété symplectique $\mathscr{T}$. Si l'on choisit un système de coordonnées affines $(x_1, \ldots, x_g)$ dans l'espace projectif $|L|$, cela revient à dire que les fonctions méromorphes $h_i = x_i \circ h \ (i = 1, \ldots g)$ sur $\mathscr{T}$ forment un système complet de hamiltoniens en involution; les flots hamiltoniens associés se linéarisent sur les fibres de h. Autrement dit, les fonctions $h_1, \ldots, h_g$ définissent un système hamiltonien complètement intégrable (algébriquement) sur $\mathscr{T}$.

On a le même résultat avec la fibration $h : \mathscr{T}^d \longrightarrow |L|$ qui paramètre les faisceaux sans torsion de rang un et de degré d sur les courbes de $|L|$. Le cas $d = g$ est particulièrement simple: la variété $\mathscr{T}^g$ est birationnellement isomorphe au produit symétrique $S^{(g)}$, et h correspond à l'application rationnelle qui associe à un élément $p_1 + \ldots + p_g$ de $S^{(g)}$ l'unique courbe de $|L|$ qui passe par $p_1, \ldots, p_g$.

1. GÉOMÉTRIE SYMPLECTIQUE

Soit M une variété analytique complexe. Une *structure symplectique* sur M est une 2-forme holomorphe ω sur M qui est fermée ($d\omega = 0$) et non dégénérée en tout point. La forme inverse de ω est une forme alternée θ sur le fibré tangent T_M ; si f, g sont des fonctions holomorphes sur M, on pose $\{f,g\} = < \theta, df \wedge dg >$. L'application $g \mapsto \{f,g\}$ est une dérivation de l'algèbre $\mathcal{O}(M)$ des fonctions holomorphes sur M ; elle est donc définie par un champ de vecteurs X_f sur M, le *champ hamiltonien* associé à f. On a

$$\{f,g\} = < \theta, df \wedge dg > = X_f g = -X_g f .$$

Le crochet de Poisson $(f,g) \mapsto \{f,g\}$ définit une structure d'algèbre de Lie sur $\mathcal{O}(M)$, et l'application $f \mapsto X_f$ est un homomorphisme d'algèbres de Lie.

Notons $2n$ la dimension de M. Un *système hamiltonien complètement intégrable* sur M consiste en la donnée de n fonctions $h_1, \dots, h_n$ sur M, satisfaisant à

a) en un point m assez général de M, les différentielles $dh_1(m), \dots, dh_n(m)$ sont linéairement indépendantes;

b) on a $\{h_i, h_j\} = 0$ quels que soient i, j.

Soit $h : M \to \mathbb{C}^n$ le morphisme défini par les h_i. La condition a) signifie que l'image de h contient un ouvert de $\mathbb{C}^n$. La condition b) signifie que les champs hamiltoniens $X_{h_1}, \dots, X_{h_n}$ sont tangents aux fibres de h ; ils commutent alors entre eux. Notons qu'en mécanique classique on fait jouer un rôle particulier à l'une des fonctions h_i (le hamiltonien), dont le flot associé décrit l'évolution du système.

Il est clair que la définition ci-dessus ne dépend pas du système de coordonnées (linéaire) sur $\mathbb{C}^n$; on peut donc parler d'un système hamiltonien complètement intégrable $M \to V$, où V est un espace vectoriel complexe de dimension n. Nous allons donner une caractérisation simple de ces systèmes. Rappelons d'abord qu'une sous-variété P de M est dite *lagrangienne* si en tout point p de P, l'espace tangent $T_p(P)$ est un sous-espace isotrope maximal de $T_p(M)$; il revient au même de dire que la dimension de P est n et que la restriction de la 2-forme ω à P est nulle. On dira qu'un morphisme h de M dans une variété de dimension n est une *fibration lagrangienne* si une fibre assez générale de h est une sous-variété lagrangienne de M.

PROPOSITION 1. *Soient M une variété symplectique de dimension $2n$, V un espace vectoriel complexe de dimension n, $h : M \to V$ une application holomorphe. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) *h définit un système hamiltonien complètement intégrable;*

(ii) *h est une fibration lagrangienne.*

DÉMONSTRATION. Chacune des conditions (i) et (ii) entraîne qu'il existe un ouvert dense U de M sur lequel h est lisse. Pour $m \in U$, notons F_m la fibre de h en $h(m)$. L'orthogonal $T_m(F_m)^\circ$ de $T_m(F_m)$ dans $T^*_m(M)$ est égal à l'image de $T^*_{h(m)}(V)$, c'est-à-dire au sous-espace de $T^*_m(M)$ engendré par $dh_1(m), \ldots, dh_n(m)$. La condition (ii) revient à dire que pour tout $m \in U$ le sous-espace $T_m(F)$ de $T_m(M)$ est totalement isotrope pour $\omega(m)$, tandis que (i) signifie que le sous-espace $T_m(F_m)^\circ$ de $T^*_m(M)$ est totalement isotrope pour $\theta(m)$. Un lemme élémentaire d'algèbre linéaire montre que ces conditions sont équivalentes. ■

REMARQUE. Soit $h : M \to N$ une fibration lagrangienne, et soit U le plus grand ouvert de M au-dessus duquel h est lisse. Les composantes des fibres de h qui rencontrent U sont des sous-espaces de dimension n de M, dont la partie lisse est lagrangienne. Par contre il peut exister des fibres de dimension $>$ n, comme le montre l'exemple $M = \mathbb{C}^4, \omega = dx \wedge dy + dz \wedge dt, N = \mathbb{C}^2$, $h(x,y,z,t) = (x^2, xz)$.

Il est peut-être raisonnable de réserver le nom de fibration lagrangienne au cas où toutes les composantes des fibres rencontrent U, ou au moins sont de dimension n. Ce sera le cas des fibrations que nous allons considérer dans la suite.

Il est bien connu qu'une variété analytique compacte de dimension n qui possède n champs de vecteurs linéairement indépendants et commutant entre eux est un tore complexe. Par conséquent, si le morphisme $h : M \to \mathbb{C}^n$ défini par un système hamiltonien complètement intégrable est propre, *les fibres lisses de* h *sont des tores complexes* (c'est l'analogue du théorème de Liouville-Arnold dans le cas réel). Plus généralement, supposons seulement qu'une fibre assez générale F de h admette une compactification lisse $\bar{F}$ telle que la codimension de $\bar{F} - F$ dans $\bar{F}$ soit ≥ 2 ; alors les champs X_{h_i} se prolongent à $\bar{F}$ par le théorème de Hartogs, et $\bar{F}$ est un tore complexe. Les trajectoires des flots hamiltoniens X_{h_i} sont des géodésiques de ces tores (images de droites complexes dans le revêtement universel du tore). On dit que ces flots se linéarisent sur les fibres de h, et que le système hamiltonien h est algébriquement complètement intégrable.

2. SURFACES $K3$

Nous reprenons les notations de l'introduction: S désigne une surface $K3$, L un fibré en droites sur S, tel que toutes les courbes du système linéaire $|L|$ sont intègres. Pour tout entier $d \in \mathbb{Z}$, on considère le morphisme $h : \mathcal{P}^d \to |L|$ dont la fibre en $C \in |L|$ est la compactification $\overline{J^dC}$ de J^dC qui paramètre les faisceaux sans torsion de rang un et de degré d sur C [A-K]. On pose $g = 1 + \frac{1}{2}(L)^2$, de sorte qu'on a $\dim|L| = g(C) = g$ et $\dim \mathscr{P} = 2g$.

L'espace $\mathscr{P}^d$ s'interprète comme un espace de modules de faisceaux simples sur S ; Mukai en déduit que $\mathscr{P}^d$ *est lisse et admet une structure symplectique* ω [M]. Celle-ci est définie comme suit: soit $C' \in |L|$, et soit $\mathscr{L}$ un élément de $\overline{J^dC}$. L'espace tangent à $\mathscr{P}^d$ en $\mathscr{L}$ s'identifie canoniquement à $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{O}_S}(\mathscr{L},\mathscr{L})$. La forme alternée $\omega(\mathscr{L})$ est définie par le produit

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{O}_S}(\mathscr{L},\mathscr{L}) \times \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{O}_S}(\mathscr{L},\mathscr{L}) \to \mathrm{Ext}^2_{\mathscr{O}_S}(\mathscr{L},\mathscr{L})$$

et par l'isomorphisme canonique $\mathrm{Ext}^2_{\mathscr{O}_S}(\mathscr{L},\mathscr{L}) \to \mathbb{C}$ fourni par la dualité de Serre.

PROPOSITION 2. *La fibration* $h : \mathscr{P}^d \to |L|$ *est lagrangienne.*

On a déjà observé qu'on a $\dim \overline{J^dC} = g = \frac{1}{2}\dim \mathscr{P}^d$. Il suffit donc de prouver que la 2-forme ω s'annule sur J^dC, pour $C \in |L|$.

Soit $C \in |L|$, et soit $\mathscr{L}$ un fibré en droites de degré d sur C. L'espace tangent en $\mathscr{L}$ à J^dC s'identifie à $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{O}_C}(\mathscr{L},\mathscr{L})$, et l'injection $T_{\mathscr{L}}(J^dC) \to T_{\mathscr{L}}(\mathscr{P}^d)$ à l'homomorphisme de changement d'anneau $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{O}_C}(\mathscr{L},\mathscr{L}) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{O}_S}(\mathscr{L},\mathscr{L})$. En effet, posons $C_\varepsilon = C \times \operatorname{Spec} \mathbb{C}[\varepsilon]$ et $S_\varepsilon = S \times \operatorname{Spec} \mathbb{C}[\varepsilon]$, avec $\varepsilon^2 = 0$; un vecteur tangent à J^dC en $\mathscr{L}$ s'interprète comme un faisceau inversible $\mathscr{L}_\varepsilon$ sur C_ε, donnant lieu à une suite exacte sur C

$$0 \to \mathscr{L} \to \mathscr{L}_\varepsilon \to \mathscr{L} \to 0 ,$$

dont la classe d'extension fournit l'élément $\eta \in \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{O}_C}(\mathscr{L},\mathscr{L})$ cherché. L'image de ce vecteur tangent dans $T_{\mathscr{L}}(\mathscr{P}^d)$ est définie par le faisceau $\mathscr{L}_\varepsilon$ vu comme $\mathscr{O}_{S_\varepsilon}$-module ; la classe d'extension correspondante est bien l'image de η par l'homomorphisme de changement d'anneau.

Considérons maintenant le diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{O}_S}(\mathscr{L},\mathscr{L}) & \times & \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{O}_S}(\mathscr{L},\mathscr{L}) & \to & \mathrm{Ext}^2_{\mathscr{O}_S}(\mathscr{L},\mathscr{L}) \\
 & & \uparrow & & \uparrow \\
\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{O}_C}(\mathscr{L},\mathscr{L}) & \times & \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{O}_C}(\mathscr{L},\mathscr{L}) & \to & \mathrm{Ext}^2_{\mathscr{O}_C}(\mathscr{L},\mathscr{L}) \ ;
\end{array}$$

on se convainc aisément de sa commutativité en interprétant les Ext^i comme groupes d'extensions à la Yoneda. Or l'espace $\mathrm{Ext}^2_{\mathscr{O}_C}(\mathscr{L},\mathscr{L})$ est nul puisqu'on a supposé $\mathscr{L}$ inversible; par conséquent la forme $\omega(\mathscr{L})$ s'annule sur $T_{\mathscr{L}}(J^dC)$, d'où la proposition. ■

REMARQUES. 1) Au vu de la prop. 1, l'énoncé de la prop. 2 admet la traduction suivante: choisissons un hyperplan à l'infini H de $|L|$, et un système de coordonnées affines $(x_1, \ldots, x_g)$ sur $|L|-H$; les fonctions $h_i = x_i \circ h$ $(i = 1, \ldots, g)$ définissent un système hamiltonien (algébriquement) complètement intégrable sur $\mathscr{P}^d - h^{-1}(H)$.

2) Soient A une surface abélienne, et M un fibré en droites ample sur A. La réunion des systèmes linéaires $|M \otimes \eta|$, pour $\eta \in \mathrm{Pic}^\circ(A)$, forme une sous-variété projective et lisse $\{M\}$ du schéma des diviseurs de A. Supposons que toutes les courbes de $\{M\}$ soient intègres; on peut alors définir comme ci-dessus pour tout entier d la jacobienne relative (compactifiée) $h : \mathscr{P}^d \to \{M\}$, qui paramètre les faisceaux sans torsion de rang un et de degré d sur les courbes de $\{M\}$. La démonstration de la prop. 2 entraîne encore que *la fibration* $h : \mathscr{P}^d \to \{M\}$ *est lagrangienne.*

3) Revenant au cas des surfaces $K3$, disons quelques mots des relations entre les différents espaces $\mathscr{P}^d$, pour $d \in \mathbf{Z}$. Toute section de $\mathscr{P}^p$ au-dessus de $|L|$ fournit des isomorphismes $\mathscr{P}^d \to \mathscr{P}^{d+p}$ pour tout d; observons en particulier que $\mathscr{P}^d$ est isomorphe à $\mathscr{P}^{d+2g-2}$ (grâce à la section canonique de $\mathscr{P}^{2g-2}$), et que toutes les variétés $\mathscr{P}^d$ deviennent isomorphes après un changement de base $T \to |L|$ génériquement fini. D'autre part, l'application $\mathscr{L} \to \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_C}(\mathscr{L}, \mathscr{O}_C)$ définit un isomorphisme de $\mathscr{P}^d$ sur $\mathscr{P}^{-d}$.

Nous allons voir que la variété $\mathscr{P}^g$ admet une description birationnelle particulièrement simple.

3. LA FIBRATION LAGRANGIENNE $S_*^{(g)} \to |L|$

Supposons pour simplifier que le fibré L soit *très ample*, et considérons la surface S comme plongée dans $\mathbf{P}^g$. Notons $S^{(g)}$ le g-ième produit symétrique de S (quotient de S^g par le groupe symétrique), et $S_*^{(g)}$ l'ouvert (lisse) de $S^{(g)}$ formé des éléments $p_1 + \ldots + p_g$ tels que les points $p_1, \ldots, p_g$ soient linéairement indépendants dans $\mathbf{P}^g$ (autrement dit engendrent un hyperplan). La variété $S_*^{(g)}$ admet une *structure symplectique*, unique à un scalaire près: on l'obtient par passage au quotient à partir de la structure symplectique $pr_1^*\varphi + \ldots + pr_g^*\varphi$ sur $S^{(g)}$, où φ est une 2-forme holomorphe non nulle sur S.

Notons $k : S_*^{(g)} \to (\mathbf{P}^g)^* = |L|$ le morphisme qui associe à $p_1 + \ldots + p_g$ l'hyperplan engendré par $p_1, \ldots, p_g$.

PROPOSITION 3. (i) *La fibration* $k : S_*^{(g)} \to |L|$ *est lagrangienne.*

(ii) *Il existe un plongement ouvert* $i : S_*^{(g)} \hookrightarrow \mathcal{P}^g$ *tel que le diagramme*

$$\begin{tikzcd} S_*^{(g)} \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "k"'] & \mathcal{P}^g \arrow[d, "h"] \\ & {|L|} \end{tikzcd}$$

soit commutatif.

Soit $p_1 + \ldots + p_g$ un élément de $S_*^{(g)}$, et soit C l'unique courbe de $|L|$ qui contient $p_1, \ldots, p_g$. Le 0-cycle $p_1 + \ldots + p_g$ définit un sous-schéma de C, d'idéal $\mathcal{I}$; le faisceau $\mathcal{L} = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_C}(\mathcal{I}, \mathcal{O}_C)$ sur C est sans torsion, de rang un et de degré g. On définit le morphisme i en associant à $p_1 + \ldots + p_g$ le faisceau $\mathcal{L}$ sur C. Son image est l'ouvert de $\mathcal{P}^g$ formé des couples $(C, \mathcal{L})$ tels que $\mathcal{L}$ admette une section non nulle unique (à un scalaire près) et que cette section s'annule en g points distincts. Il est clair que i est injectif, donc un plongement ouvert puisque les variétés considérées sont lisses.

Comme $S^{(g)} - S_*^{(g)}$ est de codimension ≥ 2 dans $S^{(g)}$, un calcul élémentaire donne dim $H^0(S_*^{(g)}, \Omega^2) = 1$. La structure symplectique sur $S_*^{(g)}$ induite par celle de $\mathcal{P}^g$ coïncide donc à un facteur près avec celle qu'on a définie ci-dessus. Il résulte alors de la prop. 2 que k est lagrangienne. ∎

REMARQUE. On peut facilement démontrer l'assertion (i) directement - et ce, sans hypothèse sur les courbes de $|L|$. Mais l'intérêt de la prop. 3 est surtout de fournir une compactification de la fibration lagrangienne $S_*^{(g)} \to |L|$. Notons que $S_*^{(g)}$ admet une autre compactification lisse symplectique $S^{[g]}$, qui paramètre les sous-schémas de longueur g de S [B]; il serait intéressant d'étudier la structure de l'application birationnelle $S^{[g]} \to \mathcal{P}^g$.

EXAMPLE. Supposons $g = 3$. La surface S est alors une quartique dans $\mathbf{P}^3$, d'équation $F(X,Y,Z,T) = 0$. La variété $S^{(3)}$ est l'ensemble des triplets non ordonnés de points $(X_i : Y_i : Z_i : T_i)_{1 \leq i \leq 3}$ de $\mathbf{P}^3$, satisfaisant à $F(X_i, Y_i, Z_i, T_i) = 0$. Notons $M_0, \ldots M_3$ les mineurs d'ordre 3 de la matrice

$$\begin{pmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 & T_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 & T_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 & T_3 \end{pmatrix}$$

Sur l'ouvert $M_0 \neq 0$ de $S^{(3)}$, les fonctions holomorphes M_1/M_0, M_2/M_0, M_3/M_0 forment un système complet de hamiltoniens en involution. Je laisse au lecteur le plaisir de calculer les flots hamiltoniens correspondants sur $S^{(3)}$ ...

BIBLIOGRAPHIE

[A-K] A. ALTMAN and S. KLEIMAN: Compactifying the Picard scheme. *Adv. in Math.*, **35** (1980), 50-112.

[B] A. BEAUVILLE: Variétés kählériennes dont la première classe de Chern est nulle. *J. Diff. Geometry*, **18** (1983), 755-782.

[M] S. MUKAI: Symplectic structure of the moduli space of sheaves on an abelian or $K3$ surface. *Invent. Math.*, **77** (1984), 101-116.