Quelques aspects de l'œuvre mathématique de F. Hirzebruch

Arnaud Beauville[1]

Hirzebruch-Riemann-Roch

En 1954, Friedrich Hirzebruch, âgé de 27 ans, annonce ce qu'on appelle maintenant le théorème de Hirzebruch-Riemann-Roch (HRR dans la suite). L'énoncé est le suivant : soit X une variété projective complexe (non singulière), de dimension n, et soit E un fibré vectoriel holomorphe sur X. On associe à E des invariants topologiques, les *classes de Chern* $c_i(E) \in H^{2i}(X,\mathbb{Z})$, et des invariants holomorphes, les *espaces de cohomologie* $H^i(X,E)$. Le théorème HRR est l'égalité

$$\sum_i (-1)^i \dim H^i(X,E) = \int_X \mathrm{ch}(E)\,\mathrm{Todd}(X)$$

où $\mathrm{ch}(E)$ et $\mathrm{Todd}(X)$ sont des polynômes tout à fait explicites, à coefficients rationnels, en les classes de Chern de E et celles du fibré tangent T_X respectivement ; $\mathrm{ch}(E)\,\mathrm{Todd}(X)$ est donc une classe dans $H^*(X,\mathbb{Q})$, et le symbole $\int_X$ signifie simplement qu'on prend sa composante dans $H^{2n}(X,\mathbb{Q})$ et qu'on lui applique l'isomorphisme canonique $H^{2n}(X,\mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}$.

Dans beaucoup d'applications, des théorèmes assurent l'annulation de $H^i(X,E)$ pour $i>0$; HRR donne alors une formule exacte pour la dimension de $H^0(X,E)$, qui est l'espace des *sections globales* (holomorphes) du fibré E, un outil essentiel de la géométrie algébrique.

Pourquoi « Riemann-Roch » ? Prenons pour X une courbe (= surface de Riemann) de genre g. Compte tenu de la dualité de Serre, HRR s'écrit dans ce cas

$$\dim H^0(X,E) - \dim H^0(X,E^*\otimes\Omega^1_X) = \deg(E) + 1 - g\ .$$

Lorsque E est un fibré de rang un, c'est le théorème classique de Riemann-Roch, l'outil fondamental de la théorie des surfaces de Riemann (si s est une section holomorphe non nulle de E et $p_1,\ldots,p_k \in X$ ses zéros, d'ordre $m_1,\ldots,m_k$, l'espace $H^0(X,E)$ s'interprète classiquement comme l'espace des fonctions méromorphes sur X ayant comme seuls pôles les p_i à l'ordre m_i au plus).

Pour $n=2$, l'espace $H^1(X,E)$ n'a pas d'interprétation géométrique simple ; c'est pourquoi les géomètres italiens énoncent le « théorème de Riemann-Roch pour les surfaces » comme une inégalité

$$\dim H^0(X,E) + \dim H^0(X,E^*\otimes\Omega^2_X) \geqslant 1 + p_a + \frac{1}{2}\int_X \Big(c_1(E)^2 + c_1(E).c_1(X)\Big)$$

où p_a est le *genre arithmétique* de X.

Pour $n>2$ il n'y a pas d'énoncé classique de ce type. C'est dire que HRR représente un progrès considérable – progrès qui a été rendu possible par l'introduction, toute récente à l'époque, de la cohomologie des faisceaux.

[1] Université de Nice, Laboratoire J.-A. Dieudonné, UMR 7351 du CNRS.

La démonstration de HRR est détaillée dans le beau livre [H]. Elle utilise des ingrédients très variés, et eux aussi tout nouveaux à l'époque : théorie de Hodge, théorie du cobordisme de Thom.

Extensions de HRR

Le théorème de HRR a eu un très grand retentissement. Il a connu de nombreuses généralisations, dont deux au moins ont eu une importance considérable.

• Le *théorème de Grothendieck-Riemann-Roch* [B-S] donne un énoncé analogue pour un *morphisme* $f : X \to Y$ propre de variétés non-singulières :

$$f_*(\mathrm{ch}(\mathrm{E})\mathrm{Todd}(X)) = \mathrm{ch} f_!(E)\mathrm{Todd}(Y)$$

où $f_!$ est « l'image directe en K-théorie ». Ce résultat plus général, valable sur un corps algébriquement clos quelconque, redonne HRR lorsque Y est un point. Comme souvent chez Grothendieck, l'introduction d'un formalisme adéquat simplifie la preuve, qui devient purement algébrique : on se ramène au cas où f est un plongement, puis, par éclatement, au cas où en outre X est une hypersurface dans Y. Notons que c'est à cette occasion que Grothendieck introduit la K-théorie $K(X)$ d'une variété algébrique, qui allait servir de modèle pour la K-théorie topologique d'Atiyah-Hirzebruch (voir ci-dessous).

• Le *théorème de l'indice* d'Atiyah-Singer [A-S] donne l'indice ($=$ dimension du noyau moins celle du conoyau) d'un opérateur différentiel elliptique D entre deux fibrés vectoriels E, F sur une variété compacte M en termes d'invariants topologiques de D, E, F. Je l'énonce sans en définir les termes :

$$\mathrm{ind}(D) = \int_M \mathrm{ch}(D)\mathrm{Todd}(X) \ .$$

L'analogie avec HRR est évidente. En appliquant ce théorème à des opérateurs convenables on obtient HRR (sur une variété complexe compacte quelconque) ainsi que de nombreuses autres applications, en particulier des théorèmes de points fixes du type Lefschetz. La démonstration originale du théorème de l'indice (il y en a eu bien d'autres depuis) suivait de près celle de HRR par Hirzebruch, à base de cobordisme.

Ce n'est pas le lieu de recenser les très nombreux développements et applications du théorème de l'indice, certainement un des sommets mathématiques du 20e siècle. En 1999 une conférence à Harvard était dédiée aux « fondateurs de la théorie de l'indice » [ABHS], que Hirzebruch appelle la « bande des quatre » : Atiyah, Bott, Hirzebruch, Singer.

La K-théorie topologique

De 1959 à 1962, Atiyah et Hirzebruch développent dans une série d'articles la K-théorie topologique $K(X)$ d'un espace topologique raisonnable X. Le théorème de périodicité de Bott, tout juste démontré, leur permet de construire une *théorie cohomologique extraordinaire* $\left(K^n(X)\right)_{n\in\mathbb{Z}}$, qui vérifie tous les axiomes usuels de la cohomologie sauf celui qui décrit la cohomologie du point, et qui est de plus 2-périodique ($K^{n+2}(X) = K^n(X)$).

Les applications sont nombreuses et importantes. Citons notamment des résultats de divisibilité de certains invariants numériques : par exemple, pour une variété compacte M « spin » de dimension $8k+4$, un de ces invariants, le « $\hat{A}$-genre », est un entier pair ; pour $k=0$ cela équivaut à dire que la signature est divisible par 16, un théorème célèbre de Rohlin. Ces résultats ont des applications topologiques profondes, par exemple aux groupes d'homotopie stable des sphères.

Une autre application utilise la *suite spectrale d'Atiyah-Hirzebruch*, qui part de la cohomologie ordinaire et aboutit à la K-théorie. Atiyah et Hirzebruch prouvent que la classe de cohomologie d'un sous-espace analytique dans une variété complexe est annulée par les différentielles de cette suite spectrale. Ils en déduisent des exemples de classes de cohomologie de torsion, dans une variété projective, qui ne sont pas représentées par des cycles algébriques. Cela contredit la formulation originale de la conjecture de Hodge – on sait depuis lors qu'il faut formuler cette conjecture en cohomologie rationnelle et non pas en cohomologie entière.

Les surfaces modulaires de Hilbert

Dans les années 70 Hirzebruch se consacre à un sujet plus pointu, les *surfaces modulaires de Hilbert*. Les *formes modulaires de Hilbert*, étudiées par Hilbert et son élève Blumenthal, sont une généralisation naturelle des formes modulaires classiques. On fixe un entier $d > 0$ et l'on considère le corps $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ et son anneau d'entiers $\mathcal{O}_d$; on note $x \mapsto x'$ la conjugaison de $\mathcal{O}_d$. Soit $\mathbb{H}$ le demi-plan de Poincaré. Le groupe $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_d)$ opère sur $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$ par

$$g \cdot (x,y) = \left(\frac{ax+b}{cx+d} \ , \ \frac{a'y+b'}{c'y+d'} \right) \quad \text{pour} \ \ g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_d) \ .$$

Une forme modulaire de Hilbert (de poids (p,q)) est une fonction holomorphe sur $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$ qui vérifie

$$f(g \cdot (x,y)) = (cx+d)^p (c'y+d')^q f(x,y)$$

pour tout g dans $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_d)$ (ou, plus généralement, dans un sous-groupe d'indice fini de $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_d)$).

Comme les formes modulaires classiques, les formes de Hilbert s'interprètent comme des formes différentielles holomorphes d'un certain type sur le quotient $(\mathbb{H} \times \mathbb{H})/\mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_d)$. Ce quotient est une surface algébrique, qui a deux défauts : elle est en général singulière (l'action n'est pas libre), et non compacte. En y ajoutant un certain nombre de points singuliers (« cusps ») on obtient une surface compacte X'_d. Hirzebruch construit alors une *résolution* de X'_d, c'est-à-dire une surface projective non-singulière X_d, munie d'un morphisme propre $X_d \to X'_d$ qui est un isomorphisme au-dessus de la partie non-singulière de X'_d. La construction, tout à fait explicite, fait intervenir le développement en fraction continuée de $\sqrt{d}$; elle donne des informations précieuses sur la surface X_d. Dans une série d'articles écrits seul ou avec différents collaborateurs (Van der Geer, Van de Ven, Zagier), Hirzebruch entreprend une étude très complète de la surface X_d, ses invariants numériques et sa géométrie.

Conclusion

En 1980 Hirzebruch fonde le Max-Planck-Institut für Mathematik de Bonn, qu'il va diriger pendant 15 ans. Cette activité va accaparer une grande partie de son temps ; il publiera néanmoins quelques jolis articles sur des sujets divers : construction de surfaces ayant des propriétés très particulières comme revêtement du plan projectif ramifié le long d'une réunion de droites, caractéristique d'Euler « orbifolde », genre elliptique, classes caractéristiques, application des théorèmes de l'indice à la théorie des nombres. Il écrit aussi une demi-douzaine de livres, rédactions de ses cours au MPI ou à l'université de Bonn.

Le rôle fondamental de Hirzebruch dans le développement des mathématiques allemandes et européennes sera discuté ailleurs. Mais on ne peut évoquer « Fritz » Hirzebruch sans mentionner sa courtoisie souriante, sa gentillesse et son attention aux autres – tout particulièrement aux jeunes mathématiciens. C'est une grande figure des mathématiques du 20^{e} siècle qui vient de nous quitter.

Références

[ABHS] *Papers dedicated to Atiyah, Bott, Hirzebruch and Singer*. Surveys in Differential Geometry, **7**. International Press, Somerville, MA, 2000.

[A-S] M. Atiyah, I. Singer : *The index of elliptic operators*. I, II, III : Ann. of Math. (2) **87** (1968), 484–604. IV, V : Ann. of Math. (2) **93** (1971), 119–149.

[B-S] A. Borel, J.-P. Serre : *Le théorème de Riemann-Roch*. Bull. Soc. Math. France **86** (1958), 97–136.

[H] F. Hirzebruch : *Topological methods in algebraic geometry*, 3rd edition. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1995.