ARNAUD BEAUVILLE

Le problème de Schottky et la conjecture de Novikov

Séminaire N. Bourbaki, 1986-1987, exp. n° 675, p. 101-112.

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1986-1987__29__101_0>

Séminaire BOURBAKI Février 1987
39ème année, 1986-87, n° 675

LE PROBLÈME DE SCHOTTKY ET LA CONJECTURE DE NOVIKOV

par Arnaud BEAUVILLE

1. INTRODUCTION

La formulation classique du problème de Schottky est la suivante. Soit C une surface de Riemann compacte de genre g. Choisissons une base symplectique $(\gamma_i)_{1\leq i\leq 2g}$ de $H_1(C,\mathbb{Z})$ (cela signifie qu'on a $\gamma_i\cdot\gamma_{i+g} = -\gamma_{i+g}\cdot\gamma_i = 1$, et $\gamma_i\cdot\gamma_j = 0$ pour $|i-j|\neq g$), et une base $(\omega_1,\ldots,\omega_g)$ de l'espace des formes holomorphes sur C. On associe à ces données la *matrice des périodes* Ω, à g lignes et $2g$ colonnes, définie par $\Omega_{ij} = \int_{\gamma_j}\omega_i$.

Ecrivons $\Omega = (\sigma\,|\,\tau)$, avec σ,τ dans $M_g(\mathbb{C})$. On peut choisir de manière unique la base (ω_i) de façon que σ soit la matrice identique. La matrice $\tau\in M_g(\mathbb{C})$ ne dépend alors que de C et de la base (γ_j). Les relations bilinéaires de Riemann expriment que τ est symétrique, et que sa partie imaginaire $\mathrm{Im}(\tau)$ est positive non dégénérée. La matrice τ définit donc un point du demi-espace de Siegel

$$H_g = \{\tau\in M_g(\mathbb{C})\ |\ \tau = {}^t\tau \ \text{ et } \ \mathrm{Im}(\tau)>0\}\ ;$$

c'est un ouvert de $\mathbb{C}^{\frac{1}{2}g(g+1)}$, isomorphe à l'espace homogène $Sp(2g)/U(g)$.

Les surfaces de Riemann de genre g dépendent de $3g-3$ paramètres (pour $g\geq 2$). Ce nombre est strictement inférieur à $\frac{1}{2}g(g+1)$ dès que $g\geq 4$; il doit donc exister des relations non triviales satisfaites par les matrices de périodes. Le problème de Schottky consiste à expliciter ces relations.

Ce problème admet une traduction géométrique simple. On appelle *variété abélienne principalement polarisée* (en abrégé v.a.p.p.) un couple (A,Θ), où A est un tore complexe et Θ une hypersurface dans A, définie à translation près ; on demande de plus que le diviseur Θ soit ample mais ne puisse bouger linéairement, c'est-à-dire $\dim_{\mathbb{C}} H^0(A,\mathcal{O}_A(\Theta)) = 1$.

A toute matrice $\tau\in H_g$, on associe une v.a.p.p. (A_τ,Θ_τ) comme suit. Le $\mathbb{Z}$-module $L_\tau = \mathbb{Z}^g\oplus\tau\mathbb{Z}^g$ est un réseau dans $\mathbb{C}^g$; on pose $A_\tau = \mathbb{C}^g/L_\tau$. On définit une fonction holomorphe ϑ sur $\mathbb{C}^g\times H_g$ par

(1) $$\vartheta(z,\tau) = \sum_{m\in\mathbb{Z}^g} \exp \pi i({}^t m\tau m + 2\,{}^t m z) \ ;$$

lorsque τ est fixé, on écrit plus simplement $\vartheta(z) = \vartheta(z,\tau)$. On a

$$\vartheta(z + p + \tau q) = \vartheta(z) \,.\, \exp \pi i(-\,{}^t q\tau q - 2\,{}^t q z) \quad \text{pour} \quad p,q \in \mathbb{Z}^g ,$$

de sorte que le diviseur de ϑ dans $\mathbb{C}^g$ est invariant sous L_τ , donc provient d'un diviseur Θ_τ sur A_τ . La théorie des fonctions thêta montre qu'on obtient ainsi, à isomorphisme près, toutes les v.a.p.p. ; de plus, deux matrices τ et τ' de H_g fournissent des v.a.p.p. isomorphes si et seulement s'il existe un élément γ du groupe symplectique $\Gamma_g = Sp(2g,\mathbb{Z})$ tel que $\tau' = \gamma . \tau$ (on fait opérer Γ_g sur H_g de la façon suivante : si $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, avec a , b , c , d dans $M_g(\mathbb{Z})$, on pose $\gamma . \tau = (a\tau + b)(c\tau + d)^{-1}$) . Autrement dit, *l'espace analytique quotient* $A_g = H_g/\Gamma_g$ *est l'espace des modules des v.a.p.p. de dimension* g .

Si maintenant τ est la matrice des périodes d'une surface de Riemann C , la v.a.p.p. (A_τ,Θ_τ) n'est autre que la *jacobienne* JC de C . Géométriquement, JC paramètre les diviseurs de degré 0 sur C , modulo équivalence linéaire ; si l'on choisit un diviseur Δ de degré $g-1$ sur C , l'ensemble des classes de diviseurs de la forme $p_1 + \ldots + p_{g-1} - \Delta$ (avec $p_i \in C$) est un diviseur thêta de JC . Le problème de Schottky consiste donc à caractériser les jacobiennes parmi toutes les v.a.p.p. ; ou encore à décrire, dans l'espace des modules A_g , la sous-variété[(1)] J_g des jacobiennes.

2. L'APPROCHE ANALYTIQUE

Le problème de Schottky a d'abord été étudié d'un point de vue analytique : on cherche à écrire des équations de J_g dans A_g , définies par des formes modulaires sur H_g . La théorie des fonctions thêta fournit certaines de ces formes, par exemple les *thêta-constantes*

(2) $$\vartheta\big[{}^p_q\big](\tau) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^g} \exp \pi i[{}^t(n+p)\tau(n+p) + 2\,{}^t(n+p)q]$$
$$= \exp \pi i({}^t p\tau p + 2\,{}^t p q) \,.\, \vartheta(q+\tau p) \quad \text{pour} \quad p,q \in \tfrac{1}{2}\,\mathbb{Z}^g .$$

Ces fonctions sont des formes modulaires de poids $1/2$ pour un sous-groupe d'indice fini de Γ_g , noté $\Gamma_g(4,8)$. Igusa [I 1] a montré qu'elles définissent des coordonnées projectives sur le quotient $H_g/\Gamma_g(4,8)$. Toute sous-variété fermée de A_g peut donc *a priori* être définie par des polynômes en les thêta-constantes ; il s'agit de déterminer effectivement ces polynômes dans le cas de J_g .

---

(1) Si l'on convient d'incorporer à J_g les *produits* d'un nombre fini de jacobiennes - ce que nous ferons désormais -, J_g est une sous-variété fermée de A_g , de dimension $3g-3$.

Le premier résultat dans cette direction est dû à Schottky, qui mit en évidence en 1888 un polynôme de degré 16 en les thêta-constantes, invariant sous Γ_4, qui s'annule identiquement sur J_4 mais pas sur A_4 [S]. Schottky semble considérer comme évident que ce polynôme définit exactement J_4 ; en fait, cette propriété n'a été démontrée que récemment par Igusa ([I 2], voir aussi [F]).

En 1909, Schottky et Jung ([S - J]) donnent un procédé systématique pour écrire des polynômes en les thêta-constantes s'annulant sur J_g, à partir d'identités satisfaites par les thêta-constantes générales en dimension $g-1$ (les relations de Schottky - Jung sont des conséquences faciles de la théorie des variétés de Prym, *cf.* [M]). Soit S_g la sous-variété de A_g définie par l'ensemble des équations obtenues par ce procédé. Van Geemen a démontré récemment que J_g *est une composante irréductible de* S_g [vG]. La démonstration procède par récurrence sur g, en considérant la compactification de Satake $\bar{A}_g$ de A_g et en reliant le bord ∂S_g de S_g dans $\bar{A}_g$ à S_{g-1}.

Malheureusement, les équations de S_g ne sont pas explicites ; le problème vient de ce qu'on ne connaît pas l'ensemble des identités satisfaites par les thêta-constantes. D'autre part, on ignore tout des autres composantes (éventuelles) de S_g.

3. L'APPROCHE GÉOMÉTRIQUE

Un point de vue un peu différent consiste à chercher des *caractérisations géométriques* des jacobiennes, conduisant si possible à des équations plus ou moins explicites. Signalons au passage que ce type de caractérisations a des applications à d'autres domaines de la géométrie algébrique, par exemple aux questions de rationalité des variétés de dimension 3 (voir [M - B]).

a) Singularités du diviseur Θ

Soient C une courbe de genre g, et (JC,Θ) sa jacobienne. La description explicite du diviseur Θ (n° 1) permet de paramétrer le lieu singulier $\mathrm{Sing}\,\Theta$ en termes de diviseurs spéciaux sur C (théorème des singularités de Riemann) ; on en déduit l'inégalité $\dim \mathrm{Sing}\,\Theta \geq g-4$. Désignons alors par $N_{g-4}^{(g)}$, ou simplement N_{g-4}, la sous-variété de A_g formée des v.a.p.p. (A,Θ) telles que $\dim \mathrm{Sing}\,\Theta \geq g-4$; Andreotti et Mayer ont prouvé que J_g est une composante irréductible de N_{g-4} [A - M]. Ils donnent de plus un procédé théoriquement explicite (mais pratiquement très compliqué) pour écrire des équations de N_{g-4} en termes des thêta-constantes et de leurs dérivées secondes.

L'ensemble N_{g-4} a d'autres composantes que les jacobiennes. En genre 4, N_0 est réunion de J_4 et du diviseur irréductible $\vartheta_{\mathrm{null}}$ formé des v.a.p.p. pour lesquelles une thêta-constante s'annule [B]. En genre 5, N_1 a cinq composantes, que l'on sait décrire explicitement ([Do], [D 2]). En genre $g \geq 6$, on dispose d'une liste de composantes de N_{g-4} [D 2], mais il n'y a aucune raison pour que cette liste soit complète.

b) Réductibilité de $\Theta \cap \Theta_a$ et trisécantes

Cette approche remonte à l'article [We], où Weil démontre le théorème de Torelli à partir de l'observation suivante (*cf.* aussi [D 1]). Soient C une courbe, (JC,Θ) sa jacobienne, p et q deux points distincts de C. On déduit facilement de la description explicite du diviseur Θ que l'intersection $\Theta \cap \Theta_{p-q}$ est réductible[1] ; plus précisément, on a

(3) $$\Theta \cap \Theta_{p-q} \subset \Theta_{p-r} \cup \Theta_{s-q} ,$$

quels que soient p, q, r, s dans C, avec $p \neq q$.

Soient alors (A,Θ) une v.a.p.p. quelconque ; pour éviter des complications sans intérêt, nous supposerons que (A,Θ) est *indécomposable*, c'est-à-dire n'est pas produit de deux v.a.p.p. non triviales. Soient a, x, y des éléments distincts non nuls de A. Considérons la condition

(4) $$\Theta \cap \Theta_a \subset \Theta_x \cup \Theta_y .$$

D'autre part, soit $\psi : A \longrightarrow \mathbb{P}^N$ (avec $N = 2^g - 1$) le morphisme associé au système linéaire $|2\Theta|$; son image est la variété de Kummer-Wirtinger $K(A,\Theta)$, isomorphe à $A/\{\pm 1\}$. Soit ζ un point de A tel que $2\zeta = x+y$; il n'est pas difficile de voir que (4) équivaut à

(5) *les points* $\psi(\zeta)$, $\psi(\zeta - a)$, $\psi(\zeta - x)$ *de* $\mathbb{P}^N$ *sont alignés.*

D'après (3), cette propriété est vérifiée pour la jacobienne d'une courbe C lorsque $a = p-q$, $x = p-r$, $2\zeta = p-q-r+s$, avec p, q, r, s dans C. La variété de Kummer d'une jacobienne admet donc une famille de dimension 4 de trisécantes. Cette propriété est tout à fait exceptionnelle ; en fait, un peu d'optimisme pousse à formuler la conjecture suivante :

Conjecture de la trisécante.- *Soit* (A,Θ) *une v.a.p.p. indécomposable. Si la variété de Kummer* $K(A,\Theta)$ *admet une trisécante,* (A,Θ) *est une jacobienne.*

Voici quelques arguments en faveur de cet énoncé. J'ai prouvé avec O. Debarre [B-D] que *l'existence d'une trisécante à* $K(A,\Theta)$ *entraîne* $\dim \operatorname{Sing} \Theta \geq g-4$; il en résulte au moins que J_g est une composante irréductible de l'ensemble des v.a.p.p. admettant une trisécante. En s'appuyant sur ce résultat, Debarre a démontré l'énoncé ci-dessus lorsque (A,Θ) est une variété de Prym [D 3] ; cela entraîne en particulier la conjecture en dimension 4 et 5. D'autre part, nous verrons au n° 4 une démonstration d'une conjecture de Novikov qui est la *version infinitésimale* de la conjecture de la trisécante.

[1] Pour toute v.a.p.p. (A,Θ) et tout point a de A, on note Θ_a le translaté $\Theta + a$ du diviseur Θ.

Enfin, on peut affaiblir la conjecture en essayant de caractériser les jacobiennes par l'existence d'une famille assez grande de trisécantes. Des résultats de ce type ont été obtenus d'abord par Gunning [G], puis raffinés par Welters [W 2]. Je vais expliquer le critère de Welters, qui joue un rôle clé dans la démonstration géométrique de la conjecture de Novikov (n° 4). Soit (A,Θ) une v.a.p.p. indécomposable, et soient α , β , γ des éléments distincts de A . Posons

(6) $$V_{\alpha,\beta,\gamma} = \{\zeta \in A \mid \psi(\zeta+\alpha)\ ,\ \psi(\zeta+\beta) \text{ et } \psi(\zeta+\gamma) \text{ sont alignés}\}\ .$$

On a vu que lorsque $A = JC$, $\alpha = 0$, $\beta = q-p$, $\gamma = r-p$, l'ensemble $V_{\alpha,\beta,\gamma}$ contient la courbe $\frac{1}{2}(C+p-q-r)$ (on a en fait égalité). Réciproquement, Welters prouve que *la condition* $\dim V_{\alpha,\beta,\gamma} \geq 1$ *entraîne que* (A,Θ) *est une jacobienne.* Citons aussi un autre résultat de Welters, qui s'appuie lui aussi sur la méthode de Gunning : si $K(A,\Theta)$ admet une famille continue de trisécantes et si $\dim \operatorname{Sing} \Theta \leq g-4$, alors (A,Θ) est une jacobienne [W 1].

c) Autres méthodes

Mentionnons d'abord un problème voisin de la conjecture de la trisécante : l'existence d'une sous-variété de A de classe $\frac{\Theta^2}{2}$ dans $H^4(A,\mathbb{Z})$ caractérise-t-elle les jacobiennes ? La réponse n'est connue que pour $g = 4$ [R]. D'autre part, diverses questions et conjectures sur le système linéaire $|2\Theta|$, liées à ce qui précède, sont discutées dans [vG - vG].

Une approche tout à fait différente, qui remonte à la fin du 19e siècle, est basée sur la géométrie différentielle : le diviseur Θ est localement une hypersurface dans $\mathbb{C}^g$, "doublement de translation". Sous des hypothèses convenables de non-dégénérescence, cette propriété caractérise les jacobiennes. Il semble malheureusement difficile de traduire ce résultat en termes de géométrie algébrique, par exemple d'en déduire des équations pour J_g dans A_g . Je renvoie à [L] pour un exposé de ce point de vue.

4. LA CONJECTURE DE NOVIKOV

Dans la suite, je supposerai toujours que la v.a.p.p. (A,Θ) est associée à une matrice τ de H_g ; cela permet de parler de la fonction ϑ de A . J'utiliserai le fait qu'il existe une base $(\psi_0, \dots, \psi_N)$ de l'espace des fonctions thêta d'ordre deux ($N = 2^g - 1$) satisfaisant à la relation de Riemann

(7) $$\vartheta(z+u)\vartheta(z-u) = \sum_i \psi_i(z)\psi_i(u) \quad \text{pour } z,u \in \mathbb{C}^g\ .$$

Le morphisme $\vec{\psi} : \mathbb{C}^g \longrightarrow \mathbb{C}^{N+1}$ défini par les ψ_i induit par passage au quotient le morphisme $\psi : A \longrightarrow \mathbb{P}^N$ associé au système linéaire $|2\Theta|$.

a) L'énoncé

A condition de les énoncer convenablement, les propriétés (4) et (5) de 3 b) se spécialisent au cas où les points a , x , y deviennent infiniment voisins de 0 . Si $a \in T_0(A)$, on définit $\Theta \cap \Theta_a$ par les équations $\vartheta = D_a \vartheta = 0$; l'existence de a , x , y satisfaisant à (4) devient

(8) *Il existe un vecteur non nul* $a \in T_0(A)$, *et deux sections non nulles de* $H^0(\Theta \cap \Theta_a, \mathcal{O}(\Theta))$ *dont le produit* (*dans* $H^0(\Theta \cap \Theta_a, \mathcal{O}(2\Theta)$) *est nul.*

De la même façon qu'on prouve l'équivalence de (4) et (5), on démontre que (8) équivaut à

(9) *Il existe des champs de vecteurs constants* D_1 , D_2 , D_3 *sur* $\mathbb{C}^g$, *avec* $D_1 \neq 0$, *et une constante* $d \in \mathbb{C}$, *tels qu'on ait*

$$(\tfrac{1}{3} D_1^4 + D_2^2 - D_1 D_3 - d)\vec{\psi}(0) = 0 .$$

La formule (7) permet de transformer cette identité en équation aux dérivées partielles. Il est commode d'utiliser la "notation bilinéaire d'Hirota" : si P est un opérateur différentiel sur $\mathbb{C}^g$, on note $P \mid \vartheta.\vartheta$ la valeur en $u = 0$ de la fonction $P(\vartheta(z+u)\vartheta(z-u))$, P opérant par rapport à la variable u . Il résulte de (7) qu'on a

$$P \mid \vartheta.\vartheta = 0 \iff P\vec{\psi}(0) = 0 , \tag{10}$$

de sorte que (9) équivaut à l'équation aux dérivées partielles

$$(\tfrac{1}{3} D_1^4 + D_2^2 - D_1 D_3 - d) \mid \vartheta.\vartheta = 0 . \tag{11}$$

Un calcul facile montre que ϑ satisfait à (11) si et seulement si $u = D_1^2 \log \vartheta$ satisfait à

$$D_1(\tfrac{1}{3} D_1^3 u + 4 u D_1 u - D_3 u) + D_2^2 u = 0 . \tag{12}$$

Cette équation non linéaire, dite équation de Kadomtsev-Petviashvili (K-P), joue un rôle fondamental dans les travaux de l'école japonaise, en liaison avec certaines représentations d'algèbres de Lie affines. Faute de place, je ne peux qu'évoquer ici ce point de vue, et renvoyer par exemple à [V].

Revenant aux jacobiennes, il suffit de faire tendre p , q , r , s vers un même point de C dans l'inclusion $\Theta \cap \Theta_{p-q} \subset \Theta_{p-r} \cup \Theta_{s-q}$ pour obtenir (8) ; par conséquent, la fonction ϑ d'une jacobienne satisfait à l'équation K-P . La réciproque, conjecturée par Novikov, a été démontrée par Shiota [Sh] :

THÉORÈME.- *Soit* (A,Θ) *une variété abélienne principalement polarisée indécomposable, dont la fonction* ϑ *satisfait à l'équation* K-P . *Alors* (A,Θ) *est une jacobienne.*

Arbarello et De Concini viennent de donner une démonstration plus géométrique et plus simple de ce résultat [A-D 2] ; c'est celle-ci que je vais exposer maintenant.

b) <u>La traduction analytique du critère de Welters</u> [A-D 1]

Le critère (6) de Welters garde lui aussi un sens lorsque α , β , γ deviennent infiniment voisins de 0 . Il s'énonce ainsi : soit Y un jet de courbe à l'ordre 2 (= sous-schéma de longueur 3) dans A à l'origine. Posons

$$V_Y = \{\zeta \in A \mid \text{il existe une droite } \ell \text{ de } \mathbb{P}^N \text{ telle que } \zeta + Y \subset \psi^{-1}(\ell)\} .$$

Dans [W 2], Welters prouve que (A,Θ) est une jacobienne dès que $\dim V_Y \geq 1$.

Il est facile de voir que Y est défini par deux champs de vecteurs $\bar{D}_1$, $\bar{D}_2$ sur A , de sorte qu'une fonction f sur A définie au voisinage de l'origine s'annule sur Y si et seulement si

$$f(0) = \bar{D}_1\, f(0) = (\bar{D}_1^2 + \bar{D}_2) f(0) = 0 . \tag{13}$$

Ainsi V_Y est l'ensemble des $\zeta \in A$ tels que les points $\psi(\zeta)$, $\bar{D}_1\, \psi(\zeta)$ et $(\bar{D}_1^2 + \bar{D}_2)\psi(\zeta)$ soient alignés. On en déduit facilement que l'espace tangent à V_Y en 0 est engendré par $\bar{D}_1$. Donc, au voisinage de l'origine, V_Y est soit un jet de courbe lisse (de la forme $\operatorname{Spec}(\mathbb{C}[t]/t^r)$) , soit une courbe lisse. Dans ce dernier cas, V_Y admet à l'origine un développement en série formelle

$$D(t) = \sum_{i\geq 1} D_i\, t^i \quad , \text{ avec } D_i \in \mathbb{C}^g \text{ et } D_1 \neq 0 .$$

La définition de V_Y se traduit par l'existence de séries $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ dans $\mathbb{C}[[t]]$ telles qu'on ait l'identité

$$a(t)\vec{\psi}(D(t)) + b(t)\, \bar{D}_1\, \vec{\psi}(D(t)) + c(t)\,(\bar{D}_1^2 + \bar{D}_2)\vec{\psi}(D(t)) = 0 . \tag{14}$$

En égalant à zéro le terme constant, puis le coefficient de t dans le premier membre, on obtient $a(0) = c(0) = 0$, $b(0)c'(0) \neq 0$. En divisant par $b(t)$ et modifiant le paramètre t , on se ramène au cas $b(t) = 1$, $c(t) = -t$; considérant alors les coefficients de t et t^2 , on obtient $a'(0) = a''(0) = 0$, $\bar{D}_1 = D_1$, $\bar{D}_2 = D_2$ (ici et dans ce qui suit, on identifie les vecteurs D_i à des champs de vecteurs constants sur $\mathbb{C}^g$). L'équation (14) est devenue

$$a(t)\vec{\psi}(D(t)) + D_1\, \vec{\psi}(D(t)) - t(D_1^2 + D_2)\vec{\psi}(D(t)) = 0 . \tag{15}$$

Pour toute fonction f sur $\mathbb{C}^g$ analytique au voisinage de l'origine, le développement de Taylor de $f(D(t))$ s'écrit

$$f(D(t)) = \sum_{s\geq 0} t^s\, \Delta_s f(0) , \tag{16}$$

où les Δ_s sont des opérateurs différentiels à coefficients constants sur $\mathbb{C}^g$, définis par

$$\Delta_s = \sum \frac{D_1^{s_1}}{s_1!} \cdots \frac{D_p^{s_p}}{s_p!} , \tag{17}$$

la somme étant prise sur l'ensemble des familles finies $(s_1,\ldots,s_p)$ d'entiers positifs telles que $s_1 + 2s_2 + \ldots + p\,s_p = s$.

Posons d'autre part $\bar{\Delta}_2 = D_1^2 + D_2$, et $a(t) = \sum_{i\geq 3} a_i t^i$. Avec ces notations, le coefficient de t^s dans (15) s'écrit

(18) $$(\Delta_1 \Delta_s - \bar{\Delta}_2 \Delta_{s-1} + \sum_{i=3}^{s} a_i \Delta_{s-i})\vec{\psi}(0) = 0 .$$

Le critère de Welters admet donc la traduction suivante : pour que (A,Θ) soit une jacobienne, il faut et il suffit qu'il existe des champs de vecteurs constants $D_1 , D_2 , \ldots$, avec $D_1 \neq 0$, et des scalaires $a_3 , a_4 , \ldots$, tels que (18) soit satisfaite pour tout s . En vertu de (10), on peut d'ailleurs remplacer (18) par

(19) $$(\Delta_1 \Delta_s - \bar{\Delta}_2 \Delta_{s-1} + \sum_{i=3}^{s} a_i \Delta_{s-i}) \mid \vartheta.\vartheta = 0 .$$

Notons $P_s(D_1 , \ldots , D_s ; a_3 , \ldots , a_s)(z)$, ou simplement $P_s(z)$, le premier membre de (19). On a $P_0 = P_1 = P_2 = 0$, et

(20) $$P_3(z) = (- \tfrac{1}{3} D_1^4 - D_2^2 + D_1 D_3 + a_3) \mid \vartheta.\vartheta .$$

L'équation $P_3(z) = 0$ n'est autre que la forme (11) de l'équation K-P . Ainsi, l'équation K-P signifie que V_Y contient à l'origine un jet à l'ordre 3 de courbe lisse.

c) <u>Réduction modulo</u> $(\vartheta, D_1 \vartheta)$

Il suffit de prouver l'énoncé suivant : s'il existe des champs de vecteurs constants $D_1 , \ldots , D_{s-1}$ sur $\mathbb{C}^g$, avec $D_1 \neq 0$, et des constantes $a_3 , \ldots , a_{s-1}$ telles que $P_3(z) = \ldots = P_{s-1}(z) = 0$, alors on peut trouver D_s et a_s de façon que P_s soit nul.

Explicitons la dépendance de P_s en les inconnues D_s et a_s . On a

(21) $$P_s(z) = P_s^o(z) + 2\,\vartheta(z) \,.\, D_1 D_s \vartheta(z) - 2\, D_1 \vartheta(z) \,.\, D_s \vartheta(z) + a_s \vartheta(z)^2 ,$$

en posant $P_s^o(z) = P_s(D_1 , \ldots , D_{s-1} , 0 ; a_3 , \ldots , a_{s-1} , 0)(z)$.

Si P_s est nul, la fonction P_s^o appartient à l'idéal $(\vartheta, D_1 \vartheta)$. L'observation fondamentale de [A-D2] est la réciproque : *si* $P_s^o \in (\vartheta, D_1 \vartheta)$, *il existe un champ de vecteurs constant* D_s *sur* $\mathbb{C}^g$ *et un nombre complexe* a_s *tels qu'on ait* $P_s(D_1 , \ldots , D_s ; a_3 , \ldots , a_s)(z) = 0$. Considérons en effet les suites exactes

(22) $$0 \longrightarrow \mathcal{O}_A(\Theta) \xrightarrow{\vartheta} \mathcal{O}_A(2\Theta) \longrightarrow \mathcal{O}_\Theta(2\Theta) \longrightarrow 0$$

(23) $$0 \longrightarrow \mathcal{O}_\Theta(\Theta) \xrightarrow{D_1 \vartheta} \mathcal{O}_\Theta(2\Theta) \longrightarrow \mathcal{O}_{\Theta\cap\Theta_{D_1}}(2\Theta) \longrightarrow 0 .$$

L'espace $H^0(\Theta,\mathcal{O}_\Theta(\Theta))$ est engendré par les restrictions à Θ des dérivées partielles de ϑ . Par construction P_s^o définit une section de $\mathcal{O}_A(2\Theta)$, qui s'annule sur $\Theta \cap \Theta_{D_1}$. On déduit alors de (23) l'existence d'une dérivation D_s telle que la fonction $P_s^o + 2\vartheta \,.\, D_1 D_s \vartheta - 2 D_1 \vartheta \,.\, D_s \vartheta$ s'annule sur Θ , puis de (22) l'existence d'une constante a_s telle qu'on ait
$P_s^o + 2\vartheta \,.\, D_1 D_s \vartheta - 2 D_1 \vartheta \,.\, D_s \vartheta + a_s \vartheta^2 = 0$, d'où notre assertion.

Il reste à établir l'implication

(24) $$P_3 = \ldots = P_{s-1} = 0 \Rightarrow P_s^o \in (\vartheta, D_1\vartheta) \ .$$

Alors que tout ce qui précède est entièrement algébrique, on ne sait actuellement prouver (24) que par un argument transcendant délicat, inspiré de la démonstration de Shiota. Dans [A] Arbarello indique une approche algébrique de (24), qui malheureusement exige des hypothèses supplémentaires sur (A,Θ) qu'il semble difficile d'éliminer.

L'idée de l'argument transcendant est d'établir le résultat suivant, plus fort que (24) : si $P_3 = \ldots = P_{s-1} = 0$, il existe une fonction holomorphe φ sur $\mathbb{C}^g$ satisfaisant à

(25) $$D_1\,\varphi\,.\,\vartheta - \varphi\,.\,D_1\,\vartheta = P_s^o \ ,$$

soit encore

(26) $$D_1(\varphi/\vartheta) = P_s^o/\vartheta^2 \ .$$

d) Existence de solutions locales

Soit U l'ouvert de $\mathbb{C}^g$ où ϑ et $D_1\,\vartheta$ ne s'annulent pas simultanément. Nous allons montrer que (26) admet une solution locale au voisinage de chaque point z_0 de U . C'est clair si $\vartheta(z_0) \neq 0$, puisqu'alors P_s^o/ϑ^2 est holomorphe en z_0 ; traitons le cas $\vartheta(z_0) = 0$ (et donc $D_1\,\vartheta(z_0) \neq 0$). On peut supposer $z_0 = 0$ et $D_1 = \partial/\partial z_1$. Le théorème de préparation de Weierstrass permet d'écrire, au voisinage de 0 ,

(27) $$\vartheta(z) = (z_1 - b(z_2, \ldots, z_n))h(z) \ ,$$

avec $b(0) = 0$, $h(0) \neq 0$. On peut alors développer P_s^o/ϑ^2 suivant les puissances de $(z_1 - b)$:

(28) $$P_s^o/\vartheta^2 = \sum_{i\geq -2} (z_1 - b)^i\, H_i(z_2, \ldots, z_n)$$

Il suffit de prouver que H_{-1} est nul : la solution cherchée sera $\varphi = h \sum_{i\geq -2} (z_1 - b)^{i+2} \frac{H_i}{i+1}$. Considérons l'opérateur différentiel

(29) $$\Gamma = \vartheta^4\left(\frac{1}{3} D_1^4 + D_2^2 - D_1 D_3 + 4\, D_1(D_1^2 \log \vartheta) D_1\right) \ .$$

Un calcul assez délicat, utilisant l'hypothèse $P_3 = \ldots = P_{s-1} = 0$, fournit l'identité $\Gamma(P_s^o/\vartheta^2) = 0$. D'autre part, il est facile de calculer la partie polaire de $\Gamma(H_i(z_1 - b)^i)$, pour $i = -1, -2$; tenant compte de (27), on obtient

(30) $$\Gamma(H_{-1}(z_1 - b)^{-1}) = -8\,h(0)^4 H_{-1}(z_1 - b)^{-1} + \text{fonction holomorphe} \ ,$$

tandis que la partie polaire de $\Gamma(H_{-2}(z_1 - b)^{-2})$ disparaît miraculeusement. Comme Γ est holomorphe et $\Gamma(P_s^o/\vartheta^2) = 0$, on conclut que H_{-1} est nul.

e) Globalisation

Considérons l'homomorphisme $\mathbb{C}$-linéaire $D_1 : \vartheta^{-1}\,\mathcal{O}_U \longrightarrow \vartheta^{-2}\,\mathcal{O}_U$; notons $\mathcal{N}$

son noyau et I son image, de sorte qu'on a une suite exacte de cohomologie

$$\text{(31)} \qquad H^0(U,\vartheta^{-1}\mathcal{O}_U) \xrightarrow{D_1} H^0(U,I) \longrightarrow H^1(U,N) \ .$$

L'existence de solutions locales de (26) établie ci-dessus signifie que la section P_s^0/ϑ^2 de $\vartheta^{-2}\mathcal{O}_U$ appartient à $H^0(U,I)$; il s'agit de prouver qu'elle est dans l'image de D_1 .

On a une suite exacte

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow \mathcal{O}_U \xrightarrow{D_1} \mathcal{O}_U \longrightarrow 0 \ ,$$

de sorte que $H^1(U,N)$ s'identifie au noyau de $D_1 : H^1(U,\mathcal{O}_U) \longrightarrow H^1(U,\mathcal{O}_U)$. Un calcul sans difficultés montre que celui-ci est nul dès que D_1 est génériquement transverse à $(\Theta \cap \Theta_{D_1})_{\mathrm{red}}$, ce qui revient à dire que la sous-variété

$$\Sigma = \{z \in \mathbb{C}^g \mid D_1^n\,\vartheta(z) = 0 \quad \text{pour tout} \quad n \in \mathbb{N}\}$$

est de dimension $\leq g-3$. Si c'est le cas, on déduit de (31) qu'il existe une solution holomorphe φ de (26) dans U ; par le théorème de Hartogs, φ s'étend en une solution holomorphe de (26) dans $\mathbb{C}^g$, ce qui achève la démonstration du théorème dans ce cas.

Cette méthode bute sur la situation exceptionnelle $\dim \Sigma = g-2$. Dans ce cas, Shiota construit, par un argument délicat utilisant l'équation $K-P$, un éclatement lisse $\widetilde{A}$ de A sur lequel D_1 se prolonge et possède la propriété de transversalité voulue. Le raisonnement cohomologique ci-dessus s'applique alors sur $\widetilde{A}$ et permet encore de conclure.

BIBLIOGRAPHIE

[A] E. ARBARELLO - *Fay's trisecant formula and a characterization of Jacobian varieties*, Proceedings of the AMS Summer Institute on Algebraic Geometry, Bowdoin College (1985), à paraître.

[A-D 1] E. ARBARELLO, C. DE CONCINI - *On a set of equations characterizing Riemann matrices*, Ann. of Math. 120 (1984), 119-140.

[A-D 2] E. ARBARELLO, C. DE CONCINI - *Another proof of a conjecture of S.P. Novikov on periods of Abelian integrals on Riemann surfaces*, Duke Math. J. 54 (1987), 163-178.

[A-M] A. ANDREOTTI, A. MAYER - *On period relations for abelian integrals on algebraic curves*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa 21 (1967), 189-238.

[B] A. BEAUVILLE - *Prym varieties and the Schottky problem*, Inventiones Math. 41 (1977), 149-196.

[B-D] A. BEAUVILLE, O. DEBARRE - *Une relation entre deux approches du problème de Schottky*, Inventiones Math. 86 (1986), 195-207.

[D 1] O. DEBARRE - *Sur la démonstration de A. Weil du théorème de Torelli pour les courbes*, Compositio Math. 58 (1986), 3-11.

[D 2] O. DEBARRE - *Sur les variétés abéliennes dont le diviseur* Θ *est singulier en codimension* 3 , Duke J. of Math., à paraître.

[D 3] O. DEBARRE - *La conjecture de la trisécante pour les variétés de Prym*, à paraître.

[Do] R. DONAGI - *The tetragonal construction*, Bull. Amer. Math. Soc. 4 (1981), 181-185.

[F] E. FREITAG - *Die Irreduzibilität der Schottkyrelation (Bemerkung zu einem Satz von J. Igusa)*, Arch. Math. 40 (1983), 255-259.

[G] R. GUNNING - *Some curves in abelian varieties*, Inventiones Math. 66 (1982), 377-389.

[vG] B. VAN GEEMEN - *Siegel modular forms vanishing on the moduli space of curves*, Inventiones Math. 78 (1984), 329-349.

[vG - vG] B. VAN GEEMEN, G. VAN DER GEER - *Kummer varieties and the moduli spaces of abelian varieties*, Amer. J. of Math. 108 (1986), 615-642.

[I 1] J. IGUSA - *Theta functions*, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York (1972).

[I 2] J. IGUSA - *On the irreducibility of Schottky's divisor*, J. Fac. Sci. Tokyo 28 (1981), 531-545.

[L] J. LITTLE - *Translation manifolds and the converse of Abel's theorem*, Compositio Math. 49 (1983), 147-171.

[M] D. MUMFORD - *Prym varieties I. Contributions to Analysis*, Academic Press, New York (1974), 325-350.

[M-B] L. MORET-BAILLY - *Variétés stablement rationnelles non rationnelles*, Sém. Bourbaki, février 1985, exp. 643, Astérisque 133-134 (1986), 223-236.

[R] Z. RAN - *On subvarieties of abelian varieties*, Inventiones Math. 62 (1981) 459-479.

[S] F. SCHOTTKY - *Zur Theorie der Abelschen Funktionen von vier Variabeln*, J. Reine Angew. Math. 102 (1888), 304-352.

[S - J] F. SCHOTTKY, H. JUNG - *Neue Sätze über Symmetralfunktionen und die Abel'schen Funktionen der Riemann'schen Theorie*, S-B. Preuss. Akad. Wiss. (Berlin), Phys. Math. Kl. 1 (1909), 282-297.

[Sh] T. SHIOTA - *Characterization of Jacobian varieties in terms of soliton equations*, Inventiones Math. 83 (1986), 333-382.

[V] J.-L. VERDIER - *Les représentations des algèbres de Lie affines : applications à quelques problèmes de physique*, Sém. Bourbaki, Juin 1982, exp. 596, Astérisque 92-93 (1982), 365-377.

[W 1] G. WELTERS - *A characterization of non-hyperelliptic Jacobi varieties*, Inventiones Math. 120 (1984), 497-504.

[W 2] G. WELTERS - *A criterion for Jacobi varieties*, Ann. of Math. 120 (1984), 497-504.

[We] A. WEIL - *Zum Beweis des Torellischen Satzes*, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math. Phys. Kl. 2a (1957), 33-53.

Arnaud BEAUVILLE
Université de Paris-Sud
Département de Mathématiques
Bât. 425
F-91405 ORSAY CEDEX