ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

A. BEAUVILLE
O. DEBARRE

Sur le problème de Schottky pour les variétés de Prym

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4e série, tome 14, nº 4 (1987), p. 613-623.
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1987_4_14_4_613_0>

Sur le problème de Schottky pour les variétés de Prym

A. BEAUVILLE - O. DEBARRE

Introduction

Soient $\mathcal{A}_g$ l'espace des modules des variétés abéliennes principalement polarisées de dimension g, et $\mathcal{J}_g$ la sous-variété de $\mathcal{A}_g$ formée par les jacobiennes. Le problème de Schottky (usuel) est la recherche d'équations, ou de caractérisations géométriques, de $\mathcal{J}_g$ dans $\mathcal{A}_g$. Une des approches de ce problème qui s'est révélée récemment très fructueuse est la méthode des trisécantes (voir [B3] pour un exposé d'ensemble). Elle est basée sur l'observation, due à Weil, que pour une jacobienne (JC, Θ) certaines intersections $\Theta \cap \Theta_a$ (où Θ_a désigne le translaté de Θ par l'élément a de JC) sont réductibles; plus précisément, il existe des points distincts non nuls a, x, y de JC tels qu'on ait $\Theta \cap \Theta_a \subset \Theta_x \cup \Theta_y$. Cette propriété équivaut à l'existence d'une trisécante à la variété de Kummer de JC.

Gunning et Welters ont prouvé que l'existence d'une famille assez grande de trisécantes caractérise les jacobiennes (cf. [B3] pour un énoncé précis); ce résultat est un ingrédient essentiel de la démonstration géométrique de la conjecture de Novikov par Arbarello-De Concini [A-D].

On conjecture que l'existence d'une seule trisécante devrait caractériser les jacobiennes (c'est l'analogue discret de la conjecture de Novikov). Nous avons démontré dans [B-D] que $\overline{\mathcal{J}}_g$ est une composante de l'ensemble des $(A, \Theta) \in \mathcal{A}_g$ pour lesquelles une intersection $\Theta \cap \Theta_a$ est réductible, ou de celles dont la variété de Kummer admet une trisécante. La démonstration consiste à prouver que ces propriétés entraînent (essentiellement) dim Sing $\Theta \geq g - 4$; il suffit ensuite d'utiliser le théorème d'Andreotti-Mayer [A-M] selon lequel $\overline{\mathcal{J}}_g$ est une composante de l'ensemble $\mathcal{N}_{g-4}$ des (A, Θ) satisfaisant à cette dernière condition.

Les variétés de Prym forment une sous-variété fermée $\mathcal{P}_g$ de $\mathcal{A}_g$, qui contient strictement $\mathcal{J}_g$. Nous abordons dans cet article la recherche d'une caractérisation géométrique de $\mathcal{P}_g$ - ce qu'on peut appeler le problème de Schottky pour les variétés de Prym. Il se trouve qu'il existe un parallélisme très frappant entre les deux problèmes de Schottky, au moins dans l'approche

Pervenuto alla Redazione il 26 Settembre 1986 e in forma definitiva il 9 Luglio 1987.

évoquée ci-dessus. Nous démontrons en effet que $\mathcal{P}_g$ *est une composante irréductible de l'ensemble des* $(A,\Theta) \in \mathcal{A}_g$ *satisfaisant à l'une des conditions suivantes:*

(i) *Il existe des éléments distincts non nuls* a, b *de* A *tels que l'intersection* $\Theta \cap \Theta_a \cap \Theta_b$ *ne soit pas intègre.*

(ii) *Il existe* a, b, x, y *distincts non nuls dans* A *tels qu'on ait* $\Theta \cap \Theta_a \cap \Theta_b \subset \Theta_x \cup \Theta_y$.

(iii) *La variété de Kummer* K(A) *admet un plan quadrisécant.*

La démonstration est tout-à-fait analogue à celle de [B-D], et repose de façon essentielle sur le théorème de [D2], qui énonce que $\mathcal{P}_g$ est une composante de l'ensemble d'Andreotti-Mayer $\mathcal{N}_{g-6}$. Nous donnons le principe de cette démonstration, ainsi que les relations entre les conditions (i) à (iii), au §1; deux résultats techniques, sur lesquels s'appuie la démonstration, sont prouvés aux §2 et 3.

1. Réductibilité de $\Theta \cap \Theta_a \cap \Theta_b$ et plans quadrisécants.

Toutes les variétés considérées dans cet article sont définies sur le corps des nombres complexes.

Soient $\tilde{C}, C$ des courbes projectives lisses, $\pi : \tilde{C} \longrightarrow C$ un revêtement étale double, σ l'involution correspondante de $\tilde{C}$. Rappelons [M] que la variété de Prym P de $(\tilde{C}, C)$ est la sous-variété abélienne de $J\tilde{C}$ image de l'endomorphisme $1 - \sigma^*$. Elle est munie d'une polarisation principale, que l'on peut définir comme suit. Il est commode, à l'aide d'une translation, de considérer P comme la variété des classes de diviseurs (modulo équivalence linéaire) D sur $\tilde{C}$ satisfaisant à $\pi_* D \equiv K_C$ et $h^o(D)$ pair [(1)]; la sous-variété des classes de diviseurs effectifs est alors un diviseur Θ de P.

Nous allons étudier la réductibilité des intersections $\Theta \cap \Theta_a \cap \Theta_b$ (considérées, dans tout cet article, au sens des schémas). Nous écarterons les cas où des intersections $\Theta \cap \Theta_a$ sont déjà réductibles. Pour p, q dans $\tilde{C}$, nous noterons $[p,q]$ l'élément $p + q - \sigma p - \sigma q$ de P.

PROPOSITION 1. *On suppose que* C *n'est ni hyperelliptique, ni trigonale, ni revêtement double d'une courbe elliptique. Soient* p, q, r, s *quatre points de* $\tilde{C}$, *tels que les éléments* $[p,q]$ *et* $[p,r]$ *de* P *soient distincts non nuls. Alors l'intersection* $\Theta \cap \Theta_{[p,q]} \cap \Theta_{[p,r]}$ *est de codimension* 3, *réductible, et contenue (schématiquement) dans* $\Theta_{[p,s]} \cup \Theta_{[q,r]}$.

DÉMONSTRATION: Par définition $\Theta \cap \Theta_{[p,q]}$ est l'ensemble des classes de diviseurs effectifs D sur $\tilde{C}$ satisfaisant à

$$\pi_* D \equiv K_C, \quad h^o(D) \text{ pair } \geq 2, \quad h^o(D - p - q + \sigma p + \sigma q) \geq 2.$$

(1) On note $h^o(D) = \dim H^o(\tilde{C}, \mathcal{O}_{\tilde{C}}(D))$.

Jointe aux deux premières, cette dernière condition équivaut à $h^o(D-p-q) \geq 1$: en effet, si $h^o(D-p-q)$ est nul, le théorème de Riemann-Roch, joint à la relation $K_{\tilde{C}} - D \equiv \sigma D$, entraîne $h^o(D+\sigma p+\sigma q) = 2$; alors σp et σq sont des points base de $|D+\sigma p+\sigma q|$, de sorte que:

$$|D-p-q+\sigma p+\sigma q| = |D-p-q| + \sigma p + \sigma q = \emptyset.$$

Inversement si $h^o(D-p-q) \geq 1$, alors $h^o(D-p-q+\sigma p+\sigma q)$ est pair et non nul, donc ≥ 2.

Considérons alors la *sous-variété spéciale* S_{pq} formée des classes de diviseurs effectifs E sur $\tilde{C}$ tels qu'on ait $\pi_* E \in |K_C - \pi p - \pi q|$ et $h^o(E+p+q)$ pair [B2]; identifions S_{pq} à une sous-variété de P à l'aide de la translation par $(p+q)$. Il résulte de ce qui précède qu'on a ensemblistement $S_{pq} = \Theta \cap \Theta_{[p,q]}$; cette égalité est en fait schématique puisque S_{pq} et $\Theta\cap\Theta_{[p,q]}$ ont même classe de cohomologie dans P [B2, th. 1]. Vu l'hypothèse sur C, le système $|K_C - \pi p - \pi q|$ définit un morphisme de C dans l'espace projectif, birationnel sur son image. On déduit alors du cor. à la prop. 3 de [B2] que la variété $\Theta \cap \Theta_{[p,q]}$ est irréductible et normale.

L'intersection $\Theta \cap \Theta_{[p,q]} \cap \Theta_{[p,r]}$ est donc un diviseur de Cartier dans $\Theta \cap \Theta_{[p,q]}$; ensemblistement, elle est formée des classes de diviseurs effectifs D sur $\tilde{C}$ satisfaisant à

$$\pi_* D \equiv K_C, \quad h^o(D) \text{ pair}, \quad h^o(D-p-q) \geq 1, \quad h^o(D-p-r) \geq 1.$$

Elle est donc réunion de la sous-variété S_{pqr} formée des classes $D \in P$ telles que $h^o(D-p-q-r) \geq 1$, et de la sous-variété W_p des classes $D \in P$ telles que $h^o(D-p) \geq 2$. La première s'identifie comme ci-dessus à la sous-variété spéciale de P associée au système linéaire $|K_C - \pi p - \pi q - \pi r|$; elle est réduite, irréductible pour r assez général, et sa classe de cohomologie dans P est $4\frac{\Theta^3}{6}$. On en conclut que W_p est un diviseur de Weil (réduit) dans $\Theta\cap\Theta_{[p,q]}$ et qu'on a l'égalité entre cycles $\Theta \cdot \Theta_{[p,q]} \cdot \Theta_{[p,r]} = S_{pqr} + \tilde{W}_p$, où $\tilde{W}_p$ est un diviseur de Weil dans $\Theta\cap\Theta_{[p,q]}$, ayant même support que W_p. Faisant varier r on obtient $\tilde{W}_p \subset \Theta_{[p,s]}$ pour tout $s \in \tilde{C}$, tandis qu'on a $S_{pqr} \subset \Theta_{[q,r]}$, d'où la proposition. ∎

REMARQUE. On peut montrer, par un calcul d'espaces tangents, que $\Theta \cap \Theta_{[p,q]} \cap \Theta_{[p,r]}$ est lisse en un point assez général de W_p. On a donc $\tilde{W}_p = W_p$ dans la démonstration précédente, et la classe de W_p dans P est $2\frac{\Theta^3}{6}$.

Nous allons voir que la prop. 1 équivaut essentiellement à l'existence de *plans quadrisécants* à la variété de Kummer d'une variété de Prym. Soit (A,Θ) une variété abélienne principalement polarisée; sauf mention du contraire nous supposerons toujours que le diviseur Θ est *symétrique*. Nous noterons $\psi : A \longrightarrow \mathbb{P}^N$ le morphisme défini par le système linéaire $|2\Theta|$, et K(A) son image: c'est la *variété de Kummer* de A. Rappelons que lorsque (A,Θ) est indécomposable (c'est-à-dire que (A,Θ) n'est pas isomorphe au produit de deux variétés abéliennes polarisées non nulles), ψ identifie K(A) au quotient de A par l'involution $x \mapsto -x$.

PROPOSITION 2. *Soit (A, Θ) une variété abélienne principalement polarisée de dimension ≥ 3, et soient a, b, x, y des éléments distincts non nuls de A. On suppose que $s = x + y$ est différent de a, b et $a + b$, et que $\Theta \cap \Theta_a \cap \Theta_b$ est de codimension 3. On considère les conditions suivantes:*

(i) *L'intersection $\Theta \cap \Theta_a \cap \Theta_b$ n'est pas intègre.*

(ii) *On a (schématiquement) $\Theta \cap \Theta_a \cap \Theta_b \subset \Theta_x \cup \Theta_y$.*

(iii) *Il existe des nombres complexes λ, μ, ν, ρ, non tous nuls, tels qu'on ait l'identité en z*

$$\lambda\theta(z)\theta(z-s) + \mu\theta(z-a)\theta(z+a-s) + \nu\theta(z-b)\theta(z+b-s) + \rho\theta(z-x)\theta(z-y) = 0.$$

(iv) *Pour tout $\varsigma \in A$ tel que $2\varsigma = s$, les quatre points distincts $\psi(\varsigma)$, $\psi(\varsigma - a), \psi(\varsigma - b), \psi(\varsigma - x)$ de $\mathbb{P}^N$ sont coplanaires.*

Alors les conditions (ii) *à* (iv) *sont équivalentes, et entraînent* (i).

DÉMONSTRATION: Pour $u \in A$, nous noterons θ_u une section non nulle de $H^o(A, \mathcal{O}_A(\Theta_u))$.

(iii) $\Longleftrightarrow$ (iv): il existe une base (ψ_α) de $H^o(A, \mathcal{O}_A(2\Theta))$ satisfaisant à $\theta_u\theta_{-u} = \sum_\alpha \psi_\alpha(u)\psi_\alpha$ pour tout $u \in A$ (formule d'addition de Riemann); on en déduit aussitôt que la formule (iii)' obtenue en remplaçant z par $z + \varsigma$ dans (iii) est équivalente à (iv).

(iii) $\Longrightarrow$ (ii): observons que le scalaire ρ qui apparaît dans (iii) ne peut être nul, sans quoi $\Theta \cap \Theta_a \cap \Theta_b$ aurait une composante de codimension 2. La formule (iii) entraîne donc que la section $\theta_x\theta_y$ de $\mathcal{O}_A(\Theta_x + \Theta_y)$ s'annule sur $\Theta \cap \Theta_a \cap \Theta_b$, d'où (ii).

(ii) $\Longrightarrow$ (iii): notons $\mathcal{I}$ l'idéal de $\Theta \cap \Theta_a \cap \Theta_b$ dans A. Le complexe de Koszul de l'intersection complète $\Theta \cap \Theta_a \cap \Theta_b$ fournit, après produit tensoriel par $\mathcal{O}_A(\Theta_x + \Theta_y)$, une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_A(-\Theta_{a+b-s}) \longrightarrow \mathcal{O}_A(\Theta_s - \Theta_a) \oplus \mathcal{O}_A(\Theta_s - \Theta_b) \oplus \mathcal{O}_A(\Theta_s - \Theta_{a+b}) \longrightarrow$$
$$\mathcal{O}_A(\Theta_s) \oplus \mathcal{O}_A(\Theta_{s-a}) \oplus \mathcal{O}_A(\Theta_{s-b}) \xrightarrow{(\theta, \theta_a, \theta_b)} \mathcal{I}(\Theta_x + \Theta_y) \longrightarrow 0.$$

Vu l'hypothèse sur s, on en déduit que l'espace $H^o(A, \mathcal{I}(\Theta_x + \Theta_y))$ est engendré par les sections $\theta\theta_s, \theta_a\theta_{s-a}$ et $\theta_b\theta_{s-b}$. Or la condition (ii) signifie que $\theta_x\theta_y$ appartient à cet espace, ce qui entraîne la relation (iii).

(ii) $\Longrightarrow$ (i): soit $u \in A$; la suite exacte de Koszul, après produit tensoriel par $\mathcal{O}_A(\Theta_u)$, s'écrit:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_A(-\Theta - \Theta_{a+b-u}) \longrightarrow \mathcal{O}_A(-\Theta_{a-u}) \oplus \mathcal{O}_A(-\Theta_{b-u}) \oplus \mathcal{O}_A(-\Theta_{a+b-u}) \longrightarrow$$
$$\mathcal{O}_A(\Theta_u - \Theta) \oplus \mathcal{O}_A(\Theta_u - \Theta_a) \oplus \mathcal{O}_A(\Theta_u - \Theta_b) \longrightarrow \mathcal{I}(\Theta_u) \longrightarrow 0.$$

Pour $u \notin \{0, a, b\}$, on en déduit que $H^o(A, \mathcal{I}(\Theta_u))$ est nul, autrement dit que $\Theta \cap \Theta_a \cap \Theta_b$ n'est pas contenu dans Θ_u. La condition (ii) (sans hypothèse sur s) entraîne donc (i). ■

REMARQUES. 1) L'hypothèse $\operatorname{codim}(\Theta \cap \Theta_a \cap \Theta_b) = 3$ n'est pas superflue. Supposons en effet que A contienne une courbe elliptique E avec $(\Theta \cdot E) = 2$. On déduit alors facilement de [B-D, (1.4)] que l'intersection $\Theta \cap \Theta_a \cap \Theta_b$, pour a, b distincts non nuls dans E, est intègre de codimension 2, et contenue dans Θ_x pour tout $x \in E$. Pour y général dans A, on a donc $\Theta \cap \Theta_a \cap \Theta_b \subset \Theta_x \cup \Theta_y$, mais (iii) n'est pas satisfaite. Notons cependant que $\psi(E)$ est une conique dans $\mathbb{P}^N$, de sorte que 4 points quelconques de $\psi(E)$ sont coplanaires.

2) Par contre l'hypothèse $s \notin \{a, b, a+b\}$ n'est là que pour simplifier l'énoncé de (iii) et (iv). Si par exemple $s = a$, il faut énoncer (iv) de la façon suivante: il existe une droite tangente à K(A) en $\psi(\varsigma)$, coplanaire avec $\psi(\varsigma - b)$ et $\psi(\varsigma - x)$.

Plus généralement, on peut envisager comme dans [B-D] les diverses spécialisations des conditions (ii) à (iv) lorsque certains des points a, b, x, y deviennent infiniment voisins de 0; nous laissons cet exercice assez fastidieux au lecteur. Dans le cas des jacobiennes, on peut ainsi faire tendre a, x, y vers 0 dans la relation $\Theta \cap \Theta_a \subset \Theta_x \cup \Theta_y$ de manière à obtenir l'équation K-P. Pour une variété de Prym de courbes lisses on ne peut faire tendre simultanément les points $[p, q], [p, r], [p, s]$ et $[q, r]$ vers 0; cela devient possible lorsque la courbe C est singulière, et on obtient alors une équation aux dérivées partielles non linéaire, dite équation BKP [(1)].

Nous pouvons maintenant énoncer notre résultat principal. On note $\mathcal{P}_g$ la sous-variété de $\mathcal{A}_g$ formée des variétés de Prym de courbes stables [B1]: c'est l'adhérence dans $\mathcal{A}_g$ de l'ensemble des variétés de Prym de courbes lisses. Elle est de dimension $3g$ pour $g \geq 5$, et contient l'ensemble $\mathcal{J}_g$ des jacobiennes.

THÉORÈME. *Considérons les conditions suivantes, pour une variété abélienne principalement polarisée* (A, Θ)*:*

(i) *Il existe des éléments distincts non nuls* a, b *de* A *tels que l'intersection* $\Theta \cap \Theta_a \cap \Theta_b$ *ne soit pas intègre.*
(ii) *Il existe des éléments distincts non nuls* a, b, x, y *de* A *tels qu'on ait (schématiquement)* $\Theta \cap \Theta_a \cap \Theta_b \subset \Theta_x \cup \Theta_y$.
(iii) *La variété de Kummer* K(A) *admet un plan quadrisécant.*

Alors pour $g \geq 7$, $\mathcal{P}_g$ *est une composante irréductible de l'ensemble des* $(A, \Theta) \in \mathcal{A}_g$ *satisfaisant à l'une des conditions* (i) *à* (iii).

REMARQUES. 1) Précisons que nous appelons plan quadrisécant à K(A) un plan dans $\mathbb{P}^N$ contenant 4 points distincts de K(A).

2) Contrairement à ce qu'on peut espérer pour les jacobiennes, l'existence d'un plan quadrisécant ne suffit pas à caractériser les variétés de Prym, comme

(1) Cette remarque est due à A. Beauville et G. Welters.

le montre l'exemple des variétés (A,Θ) contenant une courbe elliptique de degré 2.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME: Supposons qu'il existe une sous-variété irréductible Z de $\mathcal{A}_g$, contenant strictement $\mathcal{P}_g$, telle qu'un élément générique (A,Θ) de Z satisfasse à l'une des propriétés (i) à (iii). Puisque Z contient strictement $\mathcal{P}_g$, le théorème principal de [D2] entraîne dim Sing $\Theta < g-6$. En outre le groupe de Néron-Severi NS(A) est engendré par la classe de Θ (puisqu'une jacobienne générique possède déjà cette propriété [Z]). Alors pour tout élément non nul a de A, l'intersection $\Theta \cap \Theta_a$ est intègre: en effet, dans le cas contraire, on aurait en vertu de [B-D, th. 2.1] ou bien dim Sing $\Theta \geq g-4$, ou bien rg NS(A) ≥ 2. Par suite $\Theta \cap \Theta_a \cap \Theta_b$ est de codimension 3 pour tout $b \neq 0, a$. D'après la prop. 2, il existe donc a, b distincts non nuls dans A tels que $\Theta \cap \Theta_a \cap \Theta_b$ ne soit pas intègre. Le théorème résulte alors des deux énoncés suivants, qui seront démontrés aux §2 et 3:

PROPOSITION 4. *Soit (A,Θ) une variété abélienne principalement polarisée de dimension $g \geq 6$; on suppose que le groupe* NS(A) *est engendré par la classe de Θ, et qu'on a* dim Sing $\Theta < g-6$. *Soient a,b deux éléments distincts non nuls de A, donc l'un au moins est d'ordre infini. Alors l'intersection $\Theta \cap \Theta_a \cap \Theta_b$ est intègre.*

PROPOSITION 5. *Soient (P,Θ) une variété de Prym générique de dimension ≥ 5, et a,b des éléments de torsion distincts non nuls de P. Alors l'intersection $\Theta \cap \Theta_a \cap \Theta_b$ est intègre.*

2. Singularités de $\Theta \cap \Theta_a$.

PROPOSITION 3. *Soient (A,Θ) une variété abélienne principalement polarisée, et a un élément de A. On suppose que A est simple et que a est d'ordre infini. On a alors:*

$$\dim(\Theta_a \cap \mathrm{Sing}\ \Theta) \geq \dim\ \mathrm{Sing}(\Theta \cap \Theta_a) - 1.$$

Rappelons qu'une variété abélienne est dite simple si elle ne contient pas de sous-variété abélienne non triviale. D'autre part nous adoptons dans cet article la convention $\dim(\emptyset) = -1$.

DÉMONSTRATION: Soit Z une composante irréductible de $\mathrm{Sing}(\Theta \cap \Theta_a)$, de dimension maximum. Notons $\tilde{Z}$ la normalisée de Z et n le morphisme composé $\tilde{Z} \longrightarrow Z \hookrightarrow A$.

Soit θ (resp. θ_a) une section non nulle de $H^o(A, \mathcal{O}_A(\Theta))$ (resp. $H^o(A, \mathcal{O}_A(\Theta_a))$. A tout champ de vecteurs D sur A sont associées des sections $D\theta \in H^o(\Theta, \mathcal{O}(\Theta))$ et $D\theta_a \in H^o(\Theta_a, \mathcal{O}(\Theta_a))$ (cf. [B-D, §0]). Comme Z est contenu dans le lieu singulier de $\Theta \cap \Theta_a$, le critère jacobien entraîne que les $D\theta_a/D\theta$, pour D parcourant $H^o(A,T_A)$, définissent une même section méromorphe de $n^*\mathcal{O}_A(\Theta_a-\Theta)$. Cette section est holomorphe et non nulle sur l'ouvert U de $\tilde{Z}$ complémentaire de $n^{-1}(\mathrm{Sing}\,\Theta\cup\mathrm{Sing}\,\Theta_a)$; le faisceau inversible $n^*\mathcal{O}_A(\Theta_a-\Theta)$ est donc trivial sur U.

Supposons que la conclusion de la proposition ne soit pas satisfaite (ce qui entraîne, en particulier, $\dim Z\geq 1$). Alors $\Theta_a\cap$ Sing Θ, et par symétrie $\Theta\cap$ Sing Θ_a, sont de codimension ≥ 2 dans Z; par suite $\tilde{Z}-U$ est de codimension ≥ 2 dans $\tilde{Z}$. Comme $\tilde{Z}$ est normal, on en déduit que $n^*\mathcal{O}_A(\Theta_a-\Theta)$ est trivial, autrement dit que a appartient au noyau de l'homomorphisme composé

$$A\xrightarrow{\varphi}\mathrm{Pic}^o(A)\xrightarrow{n^*}\mathrm{Pic}^o(\tilde{Z}),$$

où φ est l'isomorphisme associé à la polarisation principale (défini par $\varphi(x)=\mathcal{O}_A(\Theta_x-\Theta)$). Or n^* n'est pas nul: son transposé est le morphisme d'Albanese $\mathrm{Alb}(\tilde{Z})\longrightarrow A$, dont l'image contient un translaté de Z. Puisque A est simple, le noyau de n^* est fini, ce qui contredit l'hypothèse sur a. ∎

REMARQUES. 1) La démonstration s'étend, avec quelques modifications, au cas où a est infiniment proche de 0: si D est un champ de vecteurs non nul sur A et si l'on désigne par Θ_D le diviseur de Θ défini par $D\theta=0$, on obtient l'inégalité $\dim(\Theta_D\cap\mathrm{Sing}\,\Theta)\geq\dim\mathrm{Sing}\,\Theta_D-1$ lorsque A est simple.

2) On ne peut supprimer complètement l'hypothèse A simple. Si par exemple A contient une courbe elliptique E avec $(\Theta\cdot E)=2$, le diviseur Θ est lisse en général alors que $\Theta\cap\Theta_a$ est réductible, donc singulier en codimension un pour $a\in E$ [B-D]. Par contre nous ignorons si l'hypothèse a d'ordre infini est nécessaire. Ce sont ces hypothèses restrictives dans la prop. 3 qui nous empêchent d'obtenir un résultat aussi précis que celui de [B-D].

3) On peut déduire de la prop. 3 un énoncé légèrement plus fort que le th. 2.11 de [B-D]: $\overline{J}_g$ est une composante irréductible de l'ensemble des $(A,\Theta)\in\mathcal{A}_g$ telles qu'il existe $a\neq 0$ dans A avec $\dim\mathrm{Sing}(\Theta\cap\Theta_a)\geq g-3$.

PROPOSITION 4. *Soit (A,Θ) une variété abélienne principalement polarisée de dimension g; on suppose que le groupe* NS(A) *est engendré par la classe de Θ, et qu'on a* $\dim\mathrm{Sing}\,\Theta\leq g-6$. *Soient a,b deux éléments distincts non nuls de A, dont l'un au moins est d'ordre infini. Alors l'intersection $\Theta\cap\Theta_a\cap\Theta_b$ est intègre.*

DÉMONSTRATION: On peut supposer a d'ordre infini. Puisque A est simple par hypothèse, on déduit de la prop. 3 qu'on a $\dim\mathrm{Sing}(\Theta\cap\Theta_a)\leq g-6$. La variété $X=\Theta\cap\Theta_a$ est donc normale, irréductible, et ses anneaux locaux sont factoriels ("conjecture de Samuel", [G, exp. XI, cor. 3.14]). Si le diviseur $\Theta_{b|X}$ n'est pas intègre, il est donc somme de deux diviseurs de Cartier effectifs (non nuls). Or puisque $g\geq 5$, le théorème de Lefschetz [G, exp. XII, cor. 3.6] implique que l'homomorphisme de restriction $\mathrm{Pic}(A)\longrightarrow\mathrm{Pic}(X)$ est bijectif. Il existe donc deux diviseurs sur A, de somme Θ_b, dont la restriction à X est effective. Mais vu l'hypothèse sur NS(A) l'un de ces diviseurs doit être algébriquement équivalent à $m\Theta$, avec $m \leq 0$, ce qui conduit à une contradiction. ■

3. Le cas où a et b sont de torsion.

LEMME 1. *Soient g_1, g_2 deux entiers ≥ 1; posons $g = g_1 + g_2$. Soit P une variété de Prym générique de dimension g, et soient a, b deux éléments de torsion distincts non nuls dans P. On peut alors spécialiser P en un produit $P_1 \times P_2$, où P_i est une variété de Prym générique de dimension g_i $(i = 1, 2)$, de façon que a, b se spécialisent en $(a_1, a_2), (b_1, b_2)$, où les points a_1, b_1 d'une part, a_2, b_2 d'autre part, sont distincts et non nuls.*

DÉMONSTRATION: On sait par [B1] qu'on peut spécialiser P en un produit $P_1 \times P_2$ satisfaisant aux conditions de l'énoncé; les points a et b se spécialisent alors en (a_1, a_2) et (b_1, b_2), et il s'agit de prouver qu'on peut effectuer cette spécialisation de façon que les points $0, a_i, b_i$ soient distincts $(i = 1, 2)$.

Soit m un entier ≥ 2 tel que $ma = mb = 0$. Le groupe P_m des points de P annulés par m est muni d'une forme symplectique unimodulaire à valeurs dans $\mathbf{Z}/m$. Considérons le revêtement étale de $\mathcal{P}_g$ dont la fibre en P est P_m. L'homomorphisme $\pi_1(\mathcal{P}_g, P) \longrightarrow \mathrm{Sp}(P_m)$ associé à ce revêtement est surjectif: cela résulte de l'énoncé analogue pour les jacobiennes, qui est lui-même conséquence de la connexité de l'espace de Teichmüller. Par suite, pour tout automorphisme symplectique g de $(P_1 \times P_2)_m$, le couple $(g(a_1, a_2), g(b_1, b_2))$ s'obtient encore par spécialisation à partir de (a, b). Le lemme 1 résulte donc du lemme algébrique suivant.

LEMME 2. *Soient p, q deux entiers > 1, et m leur* p.p.c.m. *Soient Γ_1, Γ_2 deux $(\mathbf{Z}/m)$-modules libres de type fini, munis de formes symplectiques unimodulaires $\varphi_i : \Lambda^2\Gamma_i \longrightarrow \mathbf{Z}/m$. On pose $\Gamma = \Gamma_1 \oplus \Gamma_2$, et on le munit de la forme $\varphi = \varphi_1 \oplus \varphi_2$. Soient a, b deux éléments distincts de Γ, d'ordre p et q respectivement. Il existe alors $g \in Sp(\Gamma)$ tel qu'on ait $ga = (a_1, a_2), gb = (b_1, b_2)$, avec $0 \neq a_1 \neq b_1$ et $0 \neq a_2 \neq b_2$.*

DÉMONSTRATION: 1) Supposons $b = \ell a$, avec $1 < \ell < p$. Le groupe $\mathrm{Sp}(\Gamma)$ opère transitivement sur l'ensemble des éléments d'ordre p de Γ; il existe donc $g \in \mathrm{Sp}(\Gamma)$ tel qu'on ait $ga = (a_1, a_2)$, où a_i est un élément d'ordre p de $\Gamma_i (i = 1, 2)$. On a alors $0 \neq a_i \neq \ell a_i$, d'où le résultat dans ce cas.

2) Supposons p et q premiers entre eux. Il existe alors des éléments α et β de Γ tels qu'on ait $a = q\alpha, b = p\beta$. Comme α est d'ordre m, l'application $x \mapsto \varphi(\alpha, x)$ de P_m dans $\mathbf{Z}/m$ est surjective; on a le même énoncé pour β. On déduit alors du théorème de Bezout qu'on peut choisir α et β de façon que $\varphi(\alpha, \beta) = 1$. Le groupe $\mathrm{Sp}(\Gamma)$ opère transitivement sur l'ensemble des couples (α, β) d'éléments de Γ tels que $\varphi(\alpha, \beta) = 1$. Par conséquent, si α_1, β_1 sont deux éléments de Γ_1 tels que $\varphi_1(\alpha_1, \beta_1) = 1$, et α_2, β_2 deux éléments d'ordre

m orthogonaux dans Γ_2, il existe $g \in \mathrm{Sp}(\Gamma)$ tels qu'on ait $g\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ et $g\beta = (\beta_1, \beta_2)$. On a alors $ga = (q\alpha_1, q\alpha_2)$ et $gb = (p\beta_1, p\beta_2)$; pour $i = 1$ ou 2, $q\alpha_i$ est d'ordre p et $p\beta_i$ d'ordre q, d'où l'énoncé dans ce cas.

3) Supposons $p = q$, et p premier. Si b est proportionnel à a on applique 1). Sinon le groupe $\mathrm{Sp}(\Gamma)$ opère transitivement sur l'ensemble des couples (a, b) non colinéaires avec $\varphi(a, b)$ fixé, et on conclut comme en 2).

4) Supposons que p soit premier et divise q; posons $q = np$. Compte tenu de 3), on peut supposer $n > 1$, Si $a = nb$, on applique 1); sinon on applique 3) à a et nb. On obtient un élément g de $\mathrm{Sp}(\Gamma)$ tel que $ga = (a_1, a_2), gb = (b_1, b_2)$ et $0 \neq a_i \neq b_i$ puisque a_i est d'ordre p et b_i d'ordre np.

5) Supposons $p = q$. Soit n l'ordre de $a - b$, et soit ℓ un nombre premier divisant n. Posons $n = d\ell$. D'après 4) appliqué à $d(a - b)$ et da, il existe $g \in \mathrm{Sp}(\Gamma)$ tel qu'on ait $ga = (a_1, a_2), gb = (b_1, b_2)$ et $0 \neq da_i \neq db_i$, d'où $0 \neq a_i \neq b_i$.

6) Traitons enfin le cas général. Ecrivons $p = p'd, q = q'd$ avec $(p', q') = 1$. Si $p' = q' = 1$ on est dans le cas précédent. Sinon on a $da \neq db$ (sans quoi da, annulé par p' et q', serait nul), et on applique 3) à da et db. ∎

PROPOSITION 5. *Soient (P, Θ) une variété de Prym générique de dimension $g \geq 5$, et a, b des éléments de torsion distincts non nuls dans P. Alors l'intersection $\Theta \cap \Theta_a \cap \Theta_b$ est intègre.*

DÉMONSTRATION: Pour $g = 5, P$ est une variété abélienne principalement polarisée générique. D'après [D1, th. 10.10], $\Theta \cap \Theta_a$ est lisse; comme NS(P) est engendré par Θ, la démonstration de la prop. 4 entraîne que $\Theta \cap \Theta_a \cap \Theta_b$ est intègre.

Démontrons la proposition par récurrence sur g. Pour une jacobienne générique (JC, Θ), les classes de cohomologie algébriques sont toujours des multiples entiers des classes minimales $\frac{\Theta^p}{p!}$ (cela résulte d'un argument facile de monodromie, cf. [A-C-G-H, chap. X]). Il en est donc de même pour P. D'autre part $\Theta \cap \Theta_a$ est intègre [B-D], donc $\Theta \cap \Theta_a \cap \Theta_b$ est de codimension 3. Soit Z une composante irréductible de cette intersection, munie de sa structure réduite; la classe de cohomologie de Z dans P est $n\frac{\Theta^3}{6}$, avec $1 \leq n \leq 6$.

Considérons alors la spécialisation de P en $P_1 \times P_2$ fournie par le lemme 1, avec $\dim(P_1) = 1$, $\dim(P_2) = g - 1$. Dans $P_1 \times P_2$, le diviseur Θ se spécialise en $\Theta' = (P_1 \times \Theta_2) + (\Theta_1 \times P_2)$, où Θ_i est un diviseur thêta de la variété de Prym P_i. On a alors l'égalité entre cycles:

$$\Theta' \cap \Theta'_{(a_1,a_2)} \cap \Theta'_{(b_1,b_2)} = P_1 \times (\Theta_2 \cap \Theta_{2,a_2} \cap \Theta_{2,b_2}) + \Theta_1 \times (\Theta_{2,a_2} \cap \Theta_{2,b_2}) + \Theta_{1,a_1} \times (\Theta_2 \cap \Theta_{2,b_2}) + \Theta_{1,b_1} \times (\Theta_2 \cap \Theta_{2,a_2}).$$

Le première sous-variété qui apparaît au second membre est intègre par l'hypothèse de récurrence, de classe θ_2^3; les trois autres sont intègres en vertu de [B-D], de classe $\theta_1\theta_2^2$ (on a noté θ_1, θ_2 les classes de $\Theta_1 \times P_2$ et $P_1 \times \Theta_2$ dans $H^2(P_1 \times P_2, \mathbb{Z})$). La composante Z de $\Theta \cap \Theta_a \cap \Theta_b$ se spécialise en une réunion de certaines de ces composantes; en comparant les classes de cohomologie, on obtient

$$n\frac{(\theta_1+\theta_2)^3}{6}=p\theta_2^3+q\theta_1\theta_2^2,\ \text{avec}\ p,q\in\mathbf{N}.$$

Ceci impose $n=6$, de sorte que $\Theta\cap\Theta_a\cap\Theta_b$ est égal à Z, et par suite est intègre. ■

REMARQUE. Soient P une variété de Prym *générique* de dimension g, et a,b des éléments distincts non nuls de P. Il paraît vraisemblable qu'au moins pour g assez grand, l'intersection $\Theta\cap\Theta_a\cap\Theta_b$ n'est réductible que dans la situation de la prop. 1 $(a=p+q-\sigma p-\sigma q,\ b=p+r-\sigma p-\sigma r)$. Pour $g\geq 12$, on peut prouver que cela résulterait de la conjecture suivante, dont une version plus faible est prouvée dans [W]: les seuls éléments a de P tels que Θ_a contienne SingΘ sont ceux qui s'écrivent $p+q-\sigma p-\sigma q$, pour $p,q\in\tilde{C}$.

BIBLIOGRAPHIE

[A-C-G-H] E. ARBARELLO, M. CORNALBA, P. GRIFFITHS, J. HARRIS. - *Geometry of algebraic curves*, volume II. A paraître.

[A-D] E. ARBARELLO, C. DE CONCINI. - *Another proof of a conjecture of S.P. Novikov on periods of Abelian integrals on Riemann surfaces.* Duke Math. J. **54** (1987), pp. 163-178.

[A-M] A. ANDREOTTI, A. MAYER. - *On period relations for abelian integrals on algebraic curves*. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. III **21** (1967), pp. 189-238.

[B1] A. BEAUVILLE. - *Prym varieties and the Schottky problem.* Invent. Math. **41** (1977), pp. 149-196.

[B2] A. BEAUVILLE. - *Sous-variétés spéciales des variétés de Prym.* Compositio Math. **45** (1982), pp. 357-383.

[B3] A. BEAUVILLE. - *Le problème de Schottky et la conjecture de Novikov.* Exposé 675 au séminaire Bourbaki. Astérisque **152-153** (1988), pp. 101-112.

[B-D] A. BEAUVILLE, O. DEBARRE. - *Une relation entre deux approches du problème de Schottky.* Invent. Math. **86** (1986), pp. 195-207.

[D1] O. DEBARRE. - *Sur les variétés abéliennes dont le diviseur thêta est singulier en codimension 3.* Duke Math. J. **56** (1988).

[D2] O. DEBARRE. - *Variétés de Prym et ensembles d'Andreotti-Mayer.* A paraître.

[G] A. GROTHENDIECK. - *Cohomologie locale des faisceaux cohérents et théorèmes de Lefschetz locaux et globaux (SGA 2).* Masson et North-Holland, Paris, Amsterdam (1968).

[M] D. MUMFORD. - *Prym varieties I. Contributions to analysis*, pp. 325-250. Academic Press, New-York (1974).

[W] G. WELTERS. - *Recovering the curve data from a general Prym variety.* Amer. J. of Math. **109** (1987), pp. 165-182.

[Z] O. ZARISKI. - *On a theorem of Severi.* Amer. J. of Math. **50** (1928), pp. 87-92.

Mathématiques - Bât. 425
Université de Paris-Sud
F-91405 ORSAY Cédex
France