Algèbre linéaire effective

Exercice 1 **(Rang d'un sev).** —

a) Déterminer le rang des matrices suivantes, en discutant éventuellement suivant les valeurs du paramètre a :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 8 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & 2 \\ 2a & 1 & a \\ 0 & a & a \end{bmatrix}$$

b) Utiliser vos calculs pour dire si le vecteur $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ est dans l'image des matrices précédentes.

c) Décrire en pseudo-code un algorithme qui calcule le rang d'une matrice (sans paramètres).

d) Décrire en pseudo-code un algorithme qui détermine si un vecteur v est dans l'image d'une matrice.

Exercice 2 **(Opérations élémentaires).** —

a) Pour les matrices suivantes, trouver une liste d'opérations élémentaires pour aboutir à une matrice de la forme $\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & 2 \\ 2a & 1 & a \\ 0 & a & a \end{bmatrix}$$

b) Décrire en pseudo-code un algorithme qui renvoie des matrices P, Q comme ci-dessus. Les matrices P, Q sont-elles uniques ?

c) A partir des matrices P et Q, comment trouve t-on une base de l'image et du noyau ?

d) Décrire en pseudo-code un algorithme qui renvoie la liste d'opérations élémentaires associée à une matrice.
Quel est l'avantage de la liste des opérations élémentaires par rapport aux matrices P et Q ?

e) **Application :** Soit $M \in \mathrm{M}_n(k)$ une matrice fixée. Soit $K_M := \{N \in \mathrm{M}_n(k),\ MNM = 0\}$. Déterminer la dimension de K_M et en expliciter une base.

Exercice 3. — Soit k un corps.

a) Montrer que le groupe linéaire $\mathrm{GL}_n(k)$ est engendré par les matrices de transvection et de dilatation. Peut-on espérer se passer de l'une ou de l'autre ?

b) Montrer que le groupe spécial linéaire $\mathbf{SL}_n(k)$ est engendré par les matrices de transvection.
[**Indication:** On pourra commencer par traiter le cas d'une matrice de la forme $\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{bmatrix}$ pour $\lambda \in k^*$.]

Exercice 4. — Soit k un corps. Décrire des algorithmes pour :

a) Etant donnée une famille de vecteurs $x_1, \dots, x_p \in k^n$, en extraire une base de $\mathrm{Vect}\{x_1, \dots, x_p\}$.

b) Compléter une famille libre de vecteurs de k^n en une base.

c) Etant donnée une famille de vecteurs $x_1, \dots, x_p \in k^n$, donner un système d'équations dont $\mathrm{Vect}\{x_1, \dots, x_p\}$ est solution.

d) Dualement, étant donné un système d'équations, trouver une base de l'espace vectoriel solution.