M2 Agrégation - UE 8.

TD : EDO Numériques : Partie 1.

Liste non exhaustive des points **à connaître :**

- *Théorie des EDO (Théorème de Cauchy-Lipschitz ! ! ! et application dans des cas "concrets".)*
- *Analyse qualitative. Points d'équilibre.*
- *Exemple de Lotka-Volterra.*
- *Quelques problèmes de Modélisation vus en UE5 (Kepler, Pendule).*
- *Portraits de phase.*
- *Outils classiques pour les preuves : Théorème des fonctions implicites, Lemme de Grönwall discret.*

∼∼∼

Au niveau numérique :

- *Notion de convergence, consistance, stabilité et ordre d'un schéma numérique.*
- *Connaître les schémas classiques (Euler explicite, Euler implicite, Runge-Kutta 4) et leurs caractéristiques principales.*
- *Savoir prouver la consistance, la stabilité et/ou la convergence d'un schéma (surtout Euler explicite).*
- *Savoir implémenter les schémas d'Euler explicite, Euler implicite (ou un schéma proposé dans le texte) et utiliser la routine de Scilab pour Runge-Kutta 4.*
- *Savoir dessiner un portrait de phase numérique avec la commande Scilab dédiée.*
- *Savoir interpréter/critiquer ses résultats ! Le tout en lien avec la modélisation proposée dans le texte.*

1. Premières notions [CM,D,G,S].

Soit $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^d$ une application continue avec $\mathcal{U}$ ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$. On souhaite étudier l'équation différentielle ordinaire donnée par le problème de Cauchy suivant

$$y' = f(t, y) \tag{1}$$
$$y(t_{ini}) = y_{ini}. \tag{2}$$

avec $(t_{ini}, y_{ini}) \in \mathcal{U}$ à préciser.

On se place dans le cadre d'application du théorème de Cauchy-Lipschitz *i.e.* on rajoute des hypothèses à f pour pouvoir appliquer un théorème de Cauchy-Lipschitz. On suppose donc qu'on a existence et unicité d'une solution maximale dont l'intervalle d'existence $I \subset \mathbb{R}$ est un ouvert [B].

On est intéressé à étudier la solution y sur un intervalle $[t_{ini}, t_{ini} + T] \subset I$ avec $T > 0$. Dans beaucoup de cas, on ne connaît pas de solution exacte explicite.
On cherche donc à trouver un moyen ***d'approcher*** *la solution y sur $[t_{ini}, t_{ini} + T]$.*

Pour cela on *discrétise* l'intervalle $[t_{ini}, t_{ini} + T]$ grâce à une subdivision de ce dernier. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On considère une subdivision de $[t_{ini}, t_{ini} + T]$, $(t_n)_{n\in[0,N]}$ constituée de $N + 1$ points de $[t_{ini}, t_{ini} + T]$,

$t_0 = t_{ini}$, $t_N = t_{init} + T$. On pose pour tout $n \in \{0, ..., N-1\}$, $\Delta t_n = t_{n+1} - t_n$ et $\Delta t_{max}^N = \max_{n \in \{1,...,N\}} \Delta t_n$. On suppose de plus que $\Delta t_{max}^N \to 0$, lorsque $N \to +\infty$.

Exemple important : On peut considérer une subdivision uniforme de pas Δt constant, avec $\Delta t = \frac{T}{N}$. On appelle Δt, le *pas* de la discrétisation.

But : On cherche ensuite à calculer $(N+1)$ points $(y_n)_{n \in \{0,...,N\}} \in \left(\mathbb{R}^d\right)^{N+1}$ tels que pour tout $n \in \{0, ..., N\}$, y_n soit une bonne approximation de $y(t_n)$.

$\rightsquigarrow$*Reste à donner un sens à cette phrase !*

L'algorithme de calcul de $(y_n)_{n \in \{0,...,N\}}$ s'appelle *un schéma (ou une méthode) numérique.* S'étant donné $y_0 \in \mathbb{R}^d$, on cherche à calculer $(y_n)_{n \in \{1,...,N\}}$ de façon itérative. Une grande classe de schémas numériques est celle des schémas (ou méthodes) à un pas.

Definition 1.1. *Soient $H > 0$ et $\Phi : [t_{ini}, t_{ini} + T] \times \mathbb{R}^d \times [0, H] \to \mathbb{R}^d$ continue. On se donne $y_0 \in \mathbb{R}^d$. Une méthode à un pas se met sous la forme*

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t_n \Phi(t_n, y_n, \Delta t_n), \text{ pour } n \in \{0, ..., N-1\}.$$

Autrement dit, à l'étape $n \in \{0, ..., N\}$, le calcul de y_{n+1} est possible si on ne connaît que la valeur de y_n. De manière analogue, une méthode à deux pas nécessiterait la connaissance de y_n et y_{n-1}. Il existe aussi des méthodes multi-pas se définissant de manière analogue.

Exemples : Euler explicite et Euler implicite cf. ci dessous et exercices.

Pour atteindre notre **but**, on attend donc certaines propriétés pour un schéma numérique. Ainsi, on cherche à montrer sa *convergence.*

Definition 1.2. *On dira qu'un schéma numérique est convergent si on a*

$$\max_{n \in \{0,...,N\}} \|y(t_n) - y_n\| \to 0,$$

lorsque $N \to +\infty$ ($\Delta t_{max}^N \to 0$).

C'est une notion essentielle qui justifie que la méthode numérique donne des valeurs approchées qui "tendent" bien vers la solution.

Pour montrer la convergence d'une *méthode à un pas*, on utilise des techniques qui font ressortir deux notions importantes. La première est la notion de *consistance.*

Definition 1.3 (Consistance)**.** *Une méthode à un pas donnée par la définition 1.1 est consistante pour l'équation différentielle* (1)*, si pour toute solution y de* (1)*, $\sum_{n=0}^{N-1} \Delta t_n \|e_n\| \to 0$ lorsque $N \to +\infty$ ($\Delta t_{max}^N \to 0$) où $e_n := \frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{\Delta t_n} - \Phi(t_n, y(t_n), \Delta t_n)$ pour $n \in \{0, ..., N-1\}$.*

Remarque 1.4. *e_n s'appelle l'erreur locale de consistance au temps t_{n+1}. On peut la réécrire $y(t_{n+1}) - \hat{y}_n$, avec $\hat{y}_n = y(t_n) + \Delta t_n \Phi(t_n, y(t_n), \Delta t_n)$ la valeur qu'on aurait obtenue avec une itération du schéma en partant de la vraie solution au temps t_n, $y(t_n)$. Ainsi e_n représente l'erreur que l'on commet sur un pas de temps avec le schéma numérique. La consistance d'un schéma assure donc que la somme de toutes ces erreurs locales tend vers 0 lorsque le pas Δt^N_{max} tend vers 0. On mesure ainsi la cohérence du schéma numérique avec l'EDO* (1). *Sans pour autant connaître la solution y de façon explicite, on sait souvent donner une estimation de cette erreur en fonction de Δt^N_{max}, si on connaît la régularité de la solution y.*

La deuxième notion est celle de la *stabilité*.

Definition 1.5. *Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On dit qu'un schéma est stable, si, en considérant $(y_n)_{n\in\{0,...,N\}}$ défini par un schéma numérique à un pas et les éléments $(z_n)_{n\in\{0,...,N\}}$ définis par*

$$z_{n+1} = z_n + \Delta t_n \Phi(t_n, z_n, \Delta t_n) + \varepsilon_n, \ pour\, n \in \{0, ..., N-1\}, \tag{3}$$

avec z_0, $(\varepsilon_n)_{n\in\{0,...,N-1\}}$ donnés, il existe $M > 0$ (indépendante de N et $(\Delta t_n)_{n\in\{0,...,N-1\}}$), tel que pour tout $n \in \{1, ..., N\}$

$$\|y_n - z_n\| \leq M \left(\|y_0 - z_0\| + \sum_{j=0}^{n-1} \|\varepsilon_j\| \right). \tag{4}$$

En utilisant ces deux notions, on peut montrer la

Proposition 1.6. *On se donne un schéma à un pas (au sens de la définition 1.1) tel que $y_0 \to y(t_{ini})$ lorsque $N \to +\infty$. Si ce schéma est stable et consistant alors il est convergent.*

Proposition 1.7. *[D] Soit $f : [t_{ini}, t_{ini} + T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ continue et globalement Lipschitzienne par rapport à la variable d'état et uniformément par rapport à la variable de temps.*
Soit $\Phi : [t_{ini}, t_{ini} + T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$ continue. La méthode à un pas associée à Φ est consistante si et seulement si $\Phi(t, y, 0) = f(t, y)$ pour tout $t \in [t_{ini}, t_{ini} + T]$ et pour tout $y \in \mathbb{R}^d$.

2. Notion d'ordre

On peut préciser/quantifier un peu comment se passe la convergence ou la consistance, en introduisant la notion d'ordre.

Definition 2.1 (Convergence à l'ordre p)**.** *On dit qu'une méthode à un pas converge à l'ordre $p \in \mathbb{N}^*$ pour le problème de Cauchy* (1), (2)*, si il existe une constante C indépendante de N telle que l'erreur de convergence $\max_{n\in\{0,...,N\}} \|y(t_n) - y_n\|$, vérifie,*

$$\max_{n\in\{0,...,N\}} \|y(t_n) - y_n\| \leq C(\Delta t^N_{max})^p. \tag{5}$$

Definition 2.2 (Consistance à l'ordre p)**.** *Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Une méthode à un pas est dite consistante à l'ordre p pour l'équation différentielle* (1) *si pour toute solution de* (1)*, il existe une constante C indépendante de N telle que l'erreur de consistance e_n comme définie à la définition 1.3, vérifie pour tout $n \in \{0, ..., N-1\}$,*

$$\|e_n\| \leq C \Delta t_n^p. \tag{6}$$

Pour montrer qu'un schéma converge, on peut essayer d'utiliser la proposition 1.6 ou également directement considérer l'erreur de convergence, y faire apparaître l'erreur de consistance et faire une étude directe. La deuxième stratégie peut se révéler utile lorsqu'il s'agit d'avoir des estimations précises de l'erreur de convergence et est assez constructive.

Definition 2.3 (Ordre exact)**.** *Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Une méthode à un pas est dite d'ordre exact p pour l'équation différentielle* (1)*, si elle est d'ordre p, mais pas d'ordre $p+1$.*

3. Schémas numériques classiques [CM,D,S,G]

Notion de schéma explicite et de schéma implicite. Un schéma *explicite* (à un pas ou multi-pas) est un schéma pour lequel le calcul de y_{n+1} se fait directement en utilisant seulement des itérés précédents y_k avec $k \leq n$. Un schéma *implicite* est un schéma pour lequel la relation définissant y_{n+1} fait intervenir y_{n+1} lui-même et d'autres itérés précédents. D'où le terme *d'implicite.*

Voici quelques exemples classiques à connaître.

3.1. Euler explicite

$y_{n+1} = y_n + \Delta t_n f(t_n, y_n)$ pour $n \in \{0, ..., N-1\}$ et y_0 une "bonne approximation" de y_{ini}.

Le schéma d'Euler explicite est un schéma à un pas, explicite et, sous de bonnes hypothèses sur f (cf. exercice), convergent à l'ordre 1.

3.2. Euler implicite

$y_{n+1} = y_n + \Delta t_n f(t_{n+1}, y_{n+1})$ pour $n \in \{0, ..., N-1\}$ et y_0 une "bonne approximation" de y_{ini}.

Le schéma d'Euler implicite est un schéma à un pas, implicite et, sous de bonnes hypothèses sur f (cf. exercice), convergent à l'ordre 1.

3.3. Runge Kutta 4 (RK4)

Connaître l'utilisation de la routine Scilab.
$y_{n+1} = y_n + \frac{\Delta t_n}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$ pour $n \in \{0, ..., N-1\}$, avec
$K_1 = f(t_n, y_n)$,
$K_2 = f(t_n + \frac{\Delta t_n}{2}, y_n + \frac{\Delta t_n}{2} K_1)$,
$K_3 = f(t_n + \frac{\Delta t_n}{2}, y_n + \frac{\Delta t_n}{2} K_2)$,
$K_4 = f(t_{n+1}, y_n + \Delta t_n K_3)$,
et y_0 une bonne approximation de y_{ini}.

Le schéma de Runge-Kutta 4 est un schéma à un pas, explicite et, sous de bonnes hypothèses sur f (cf. [D]), convergent à l'ordre 4.

4. Exercices [CM,D,G,S]

Ex 1. Preuves/résultats utiles

1) Montrer les propositions 1.6 et 1.7.

2) Montrer le lemme de Grönwall discret : Soit $(u_n)_{n\geq 0}$, $(v_n)_{n\geq 0}$ et $(a_n)_{n\geq 0}$ des suites à termes réels positifs. Si pour tout $n \geq 0$,

$$u_{n+1} \leq a_n + (1+v_n)u_n,$$

alors pour tout $n \geq 1$,

$$u_n \leq \exp\left(\sum_{k=0}^{n-1} v_k\right) u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \exp\left(\sum_{l=k+1}^{n-1} v_l\right) a_k.$$

Ex 2. Euler explicite

On suppose que f est continue et globalement Lipschitzienne par rapport à la variable d'état et uniformément par rapport à la variable de temps sur $\mathcal{U}$.

1) Montrer, en utilisant la proposition 1.6, que le schéma d'Euler explicite converge.

2) On suppose maintenant de plus que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{U}$. Montrer que le schéma d'Euler explicite converge à l'ordre 1 de façon directe sans utiliser explicitement la proposition 1.6. Peut-on réduire l'hypothèse de régularité sur f ?

Ex 3. Euler implicite

On suppose que $f : [t_{ini}, t_{ini}+T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ est continue et globalement Lipschitzienne par rapport à la variable d'état et uniformément par rapport à la variable de temps.

Soit

$$F : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times [t_{ini}, t_{ini}+T] \times \mathbb{R}^d & \to & \mathbb{R}^d \\ (y, \Delta t, t, z) & \to & y + \Delta t f(t,z) \end{array}$$

1) Montrer qu'il existe h^* tel que pour tout $(y, \Delta t, t) \in \mathbb{R}^d \times [0, h^*] \times [t_{ini}, t_{ini}+T]$, il existe un unique z tel que $F(y, \Delta t, t, z) = z$.

2) En déduire que le schéma d'Euler implicite est bien un schéma à un pas au sens de la définition 1.1.

3) Montrer que le schéma d'Euler implicite converge.

Ex 4. Cas des problèmes dissipatifs [G]

On suppose que f est continue et globalement Lipschitzienne par rapport à la variable d'état et uniformément par rapport à la variable de temps sur $\mathcal{U}$ et que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{U}$. On suppose de plus que le problème est *dissipatif* où

Definition 4.1. *On dit que le problème est dissipatif, si la fonction f vérifie*

$$(f(t,y_1) - f(t,y_2), y_1 - y_2) \leq 0,\ \forall (t,y_1) \in \mathcal{U}, (t,y_2) \in \mathcal{U}.$$

On a la proposition

Proposition 4.2. *Si f est différentiable, alors le problème est dissipatif si $\forall (t,y) \in \mathcal{U}$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^d$, on a*

$$\nabla_y f(t,y)\xi \cdot \xi \leq 0.$$

Montrer que le schéma d'Euler implicite est bien défini et converge à l'ordre 1 sans nécessairement utiliser directement la proposition 1.6.

Ex 5. Une EDO linéaire... toute simple...

1) On considère l'équation différentielle $y' = 3y - 1$ sur l'intervalle $[0, 10]$, avec pour donnée initiale $y(0) = \frac{1}{3}$ et $y(0) = \frac{1}{3} + \varepsilon$. Déterminer la valeur de la solution de chacun des problèmes de Cauchy associés en $t = 10$. Que conclure ?

2) On considère l'équation différentielle $y' = -150y + 50$ sur l'intervalle $[0, 1]$, avec pour donnée initiale $y(0) = \frac{1}{3}$ et $y(0) = \frac{1}{3} + \varepsilon$. Déterminer la valeur de la solution de chacun des problèmes de Cauchy associés en $t = 1$. Que conclure ?
Montrer que le schéma d'Euler explicite avec un pas constant conduit à

$$y_n - \frac{1}{3} = (1 - 150\Delta t)^n \left(y_0 - \frac{1}{3} \right).$$

Avec $\Delta t = \frac{1}{50}$ et $y(0) = \frac{1}{3} + \varepsilon$, quelle approximation de $y(1)$ obtient-on ? Que conclure ?

Ex 6. Exemple de calcul de consistance et/ou convergence.

On souhaite étudier les trois schémas suivants :

Schéma de Heun
Pour $n \in \{0, ..., N-1\}$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= y_n + \Delta t_n f(t_n, y_n), && (7)\\ y_{n+1} &= y_n + \frac{\Delta t_n}{2} \left(f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, v_{n+1}) \right), && (8)\\ y_0 & \quad \text{donné}. && (9) \end{aligned}$$

Schéma de Crank Nicolson
Pour $n \in \{0, ..., N-1\}$,

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \frac{\Delta t_n}{2}\left(f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1})\right), && (10)\\ y_0 & \quad \text{donné.} && (11) \end{aligned}$$

Pour répondre aux questions suivantes on pourra ajouter des hypothèses sur f nécessaires aux preuves et on s'intéressera également aux ordres.

1) La méthode de Heun, est-elle explicite ou implicite ? Etudier son erreur de consistance. Montrer qu'elle converge. Quel est l'ordre de convergence ?

2) La méthode de Crank-Nicolson est elle explicite ou implicite ? Etudier son erreur de consistance.

3) Etudier l'erreur de consistance de la méthode de Runge Kutta 4.

Ex 7. Schéma dans le cas vectoriel

Pour chacune des équations qui suivent, on étudiera l'existence et l'unicité des solutions.

1) On considère le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_2(t) + y_1(t), \\ y_2'(t) = y_1(t) + t, \\ y_1(1) = 2, \\ y_2(1) = 1. \end{cases}$$

Ecrire les schémas d'Euler explicite, implicite, Heun et Crank-Nicolson sur cet exemple.
2) On considère les équations différentielles suivantes :

$$\begin{cases} y^{(3)}(t) = y^{(2)}(t) + y'(t) - y(t) + 1, \\ y(0) = 2, \\ y'(0) = 2, \\ y^{(2)}(0) = 1. \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} y^{(2)}(t) = t^2 + (y(t))^2 + 1, \\ y(1) = 0, \\ y'(1) = 2, \end{cases}$$

Ecrire les schémas d'Euler explicite et de Heun.

Ex 8. Schéma pour l'oscillateur harmonique Soit l'équation différentielle décrivant le mouvement d'un oscillateur harmonique :

$$y'' + \omega^2 y = 0.$$

On se donne les conditions initiales $y(0) = y_{ini}$ et $y'(0) = v_{ini}$ avec y_{ini} et v_{ini} deux réels.

1) A-t-on existence et unicité d'une solution ?

2) Écrire les schéma d'Euler explicite, d'Euler implicite et de Crank Nicolson (cf. exercice plus haut) pour cette équation différentielle.

3) Quel est l'ordre de consistance de ces méthodes.

Ex 9. Un schéma multi-pas.
On considère le schéma qui suit pour résoudre l'équation différentielle ordinaire $y'(t) = -10y(t)$ avec une condition initiale donnée sur un intervalle de $\mathbb{R}$.

Pour $h > 0$, $n \geq 1$, $\dfrac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h} = -10y_n$.

Montrer que cette méthode est consistante à l'ordre 2.

Ex 10. On considère l'équation différentielle ordinaire

$$\left\{ \begin{array}{l} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_{ini}) = y_0. \end{array} \right.$$

sur l'intervalle de temps $[t_{ini}, t_f]$, avec $t_f > t_{ini}$.

En utilisant la formule de quadrature du point milieu pour aprocher l'intégrale $\displaystyle\int f(., y(.))$, proposez un schéma de résolution de cette équation différentielle.

Références :

[B] F. Berthelin, *Équations différentielles*, Cassini.

[CM] M. Crouzeix, A.L. Mignot, *Analyse Numérique des équations différentielles*, Masson.

[D] J-P. Demailly, *Analyse Numérique et Equations Différentielles,* PUG.

[G] T. Goudon, *Mathématiques pour la modélisation et le calcul scientifique,* Collection Mathématiques et Statistiques, ISTE eds.

[S] M. Schatzman, *Analyse Numérique,* Dunod.