**M2 Agrégation - UE 8.**

**TD : Théorèmes de Perron-Frobenius.**

*Liste non exhaustive des points* **à connaître :**

— *Matrices positives, primitives*

— *rayon spectral*

∼∼∼

*Au niveau de l'approximation :*

— *Méthode de la puissance*

— *Méthodes de recherche de valeurs propres et de vecteurs propres*

## I. Définition et théorèmes

Les théorèmes de Perron-Frobenius donnent des renseignements sur la plus grande valeur propre d'une matrice et l'espace propre associé. C'est une information souvent importante pour les systèmes dynamiques $x_{n+1} = Ax_n + b$, dans l'étude de modèles de type Leontieff en économie, en probabilités et par exemple pour l'algorithme du PageRank de Google.

Pour ces théorèmes, on impose des contraintes de signe positif sur les coefficients. Plus précisément :

**Définition I.1.** *Une matrice (ou un vecteur) $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ sera dit positive (noté $A \succcurlyeq 0$) si tous ses coefficients sont positifs. Elle sera dite strictement positive (noté $A \succ 0$) si tous ses coefficients sont strictement positifs.*

**Définition I.2.** *Une matrice (carrée) $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ sera dit primitive si $A \succcurlyeq 0$ et s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k \succ 0$.*

**Théorème I.3. Théorème de Perron-Frobenius, forme faible :** *On suppose que $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est une matrice positive. Alors $\rho(A)$ est une valeur propre de $A$, et il existe un vecteur propre positif associé.*

**Théorème I.4. Théorème de Perron-Frobenius, forme forte :** *On suppose que $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est une matrice primitive. Alors :*
*(i) $\rho(A)$ est strictement positif et est une valeur propre de $A$ ;*
*(ii) il existe un vecteur propre strictement positif $u$ associé à la valeur propre $\rho(A)$ ;*
*(iii) les seuls vecteurs propres positifs de $A$ sont les multiples non nuls de $u$ ;*
*(iv) la seule valeur propre (complexe) de $A$ de module $\rho(A)$ est $\rho(A)$ ;*
*(v) $\rho(A)$ est de multiplicité algébrique égale à 1.*

## II. Exercices

**Ex 1.** *Quelques remarques.*

**1)** Montrer les inclusions strictes

$$\{\text{matrices strictement positives}\} \subsetneq \{\text{matrices primitives}\} \subsetneq \{\text{matrices positives}\}.$$

**2)** Montrer que si $A \succcurlyeq B \succcurlyeq 0$ alors $\rho(A) \geq \rho(B)$.
**3)** Établir la forme faible à partir de la forme forte.

**4)** On se donne $B \in \mathcal{M}_p$ une matrice primitive (ou strictement positive) et on considère la matrice par blocs $A \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} B & 0 \\ \mathrm{I}_p & B \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2p}(\mathbb{R})$.
*a)* Est-ce que $A$ est primitive ?
*b)* Que peut-on dire de la multiplicité algébrique des valeurs propres de $A$ ?
*c)* Comparer $\rho(A)$ et $\rho(B)$, et déterminer $\operatorname{Ker}(A - \rho(A)\mathrm{I}_{2p})$. Conclusion ?

**5)** On considère la matrice $A \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
*a)* Est-ce que $A$ est primitive ?
*b)* Que peut-on dire des vecteurs/valeurs propres ?

**6)** Vérifier que si $A \succcurlyeq B \succcurlyeq 0$ et si $B$ est primitive, alors $A$ l'est aussi.

**Ex 2.** *Démonstration de la forme faible à partir du théorème de Brouwer.* [D. Serre]

**1)** Établir l'existence d'un vecteur $v \succcurlyeq 0$ tel que $\sum_{j=1}^{p} v_j = 1$ et $Av - \rho(A)v \succcurlyeq 0$.

**2)** On considère

$$C \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ x \succcurlyeq 0, \text{ t.q. } \sum_{j=1}^{p} x_j = 1 \text{ et } Ax - \rho(A)x \succcurlyeq 0 \right\}.$$

Montrer que $C$ est un compact convexe non vide.

**3)** Que dire s'il existe $x \in C$ tel que $Ax = 0$ ?

**4)** On suppose que pour tout $x \in C$, $Ax \neq 0$. Que pensez-vous de l'application $f : C \ni x \mapsto \|Ax\|_1^{-1} Ax$ ?

**Ex 3.** *À propos de la dimension du sous-espace propre.* [Se]

On se donne $A \succcurlyeq 0$ une matrice primitive (ou strictement positive).

**1)** Établir que si $x \in \mathbb{R}^p \setminus \{0\}$, $x \succcurlyeq 0$ et $x \in \operatorname{Ker}(A - \rho(A)\mathrm{I}_p)$, alors $x \succ 0$. En déduire que $A$ admet un vecteur propre $u \succ 0$ pour la valeur propre $\rho(A)$.

**2)** On considère $y$ un vecteur propre (réel) pour la valeur propre $\rho(A)$.
*a)* Construire $t \in \mathbb{R}$ tel que $u - ty \succcurlyeq 0$ et $u - ty$ ait une coordonnée nulle.
*b)* Conclure sur la dimension de $\mathrm{Ker}(A - \rho(A)\mathrm{I}_p)$.

**3)** En utilisant un bon vecteur propre, montrer que $\rho(A)$ est de multiplicité algébrique égale à 1.

**4)** Étudier le comportement de la suite récurrente $x_{n+1} = Ax_n$ partant d'un $x_0 \succcurlyeq 0$ (non nul).

**Référence :**

• [Se] D. Serre, *Les matrices : théorie et pratique,* Dunod (2001).