M2 Agrégation - UE 8.

TP : EDO Numériques.

Rappels succincts : *Quelques schémas numériques classiques.*

On considère l'équation différentielle ordinaire donnée par le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_{ini}. \end{cases}$$

sur l'intervalle de temps $[t_0, t_f]$, avec $t_0 \in \mathbb{R}$ et $t_f > t_0$.

Discrétisation. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On considère une subdivision $(t_n)_{n\in[0,N]}$ de $[t_0, t_f]$ de pas h constant, avec $h = \dfrac{t_f - t_0}{N}$.

Schémas numériques classiques :

- **Euler explicite** .
  $y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$ pour $n \in [0, N-1]$ et y_0 une bonne approximation de y_{ini}.
- **Euler implicite** .
  $y_{n+1} = y_n + hf(t_{n+1}, y_{n+1})$ pour $n \in [0, N-1]$ et y_0 une bonne approximation de y_{ini}.
- **Runge Kutta 4 (RK4)**. *Connaître l'utilisation de la routine Scilab.*
  $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$ pour $n \in [0, N-1]$, avec
  $K_1 = f(t_n, y_n)$,
  $K_2 = f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}K_1)$,
  $K_3 = f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}K_2)$,
  $K_4 = f(t_{n+1}, y_n + hK_3)$,
  et y_0 une bonne approximation de y_{ini}.

Première partie : Equations différentielles **linéaires**.

$\sim\sim\sim\sim\sim$

A. Un exemple d'EDO **scalaire**.

Avec les notations des rappels, on considère l'équation différentielle ordinaire donnée par le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} y'(t) = -ky(t) + r, \\ y(t_0) = y_{ini}. \end{cases}$$

sur l'intervalle de temps $[t_0, t_f]$, avec $t_0 \in \mathbb{R}$ et $t_f > t_0$, $k > 0$, $r \in \mathbb{R}$, $y_{ini} \in \mathbb{R}$.

Question 1 : *Programmation de la méthode d'Euler explicite.*

Construire une fonction Scilab qui à k, r, t_0, t_f, y_{ini} et N, renvoie la suite $(y_n)_{n\in[0,N]}$ des valeurs approchées de la solution y aux temps $(t_n)_{n\in[0,N]}$ par la méthode d'Euler explicite.

Validation.

Tester vos programmes sur, par exemple, le problème de Cauchy (I) suivant :

$$\begin{cases} y'(t) = -y(t), \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

avec $t_0 = 0$ et $t_f = 1$, et donc $k = 1$, $r = 0$, $y_{ini} = 1$.

On pourra entre autre :

(a) Tracer les valeurs approchées et la courbe de la solution exacte en fonction du temps.

(b) Tracer la courbe représentative de la valeur absolue de l'erreur entre la solution exacte et la solution approchée au cours du temps.

(c) Faire plusieurs simulations pour plusieurs valeurs du pas de discrétisation $h > 0$ (ou valeurs de N) et tracer ensuite la courbe représentative du maximum de l'erreur sur $[t_0, t_f]$, en fonction du pas h. Faire le même graphe en échelles logarithmiques. En déduire graphiquement les ordres des méthodes d'approximation utilisées.

(d) Proposez un calcul permettant de visualiser l'ordre grâce à un tableau de valeurs.

On rappelle que l'ordre exact d'une méthode numérique convergente est le plus grand entier non nul p tel que, si err represente la valeur absolue de l'erreur entre la solution numérique et la solution exacte, $err = O(h^p)$

Question 2 : *Programmation de la méthode d'Euler implicite.*

Construire une fonction Scilab qui à k, r, t_0, t_f, y_{ini} et N, renvoie la suite $(y_n)_{n\in[0,N]}$ des valeurs approchées de la solution y aux temps $(t_n)_{n\in[0,N]}$ par la méthode d'Euler implicite. *On pourra aussi l'inclure dans la première fonction Scilab.*

Reprendre les étapes de **Validation**.

Question 3 : *Comparaison des schémas sur des problèmes raides.*

On considère le cas : $k = 150$, $r = 30$, $y_{ini} = \dfrac{1}{5}$, $t_0 = 0$, $t_f = 1$

1) Donner la solution exacte de cette équation différentielle ordinaire sur $[0, 1]$.

2) a) Montrer que si la donnée initiale est modifiée en $y(0) = \dfrac{1}{5} + \varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$, la solution exacte de cette équation différentielle ordinaire devient : $y(t) = \dfrac{1}{5} + \varepsilon e^{-150t}$.

b) Tester la résolution de ce problème avec la méthode d'Euler explicite et les paramètres $h = \dfrac{1}{50}$, $\varepsilon = 10^{-10}$ et $t_f = 1$. Commentez.

3) Que se passe-t-il pour la méthode d'Euler implicite et les mêmes choix de paramètres qu'en 2)b) ?

4) Observer ce qu'il se passe pour la méthode d'Euler explicite et $h = \dfrac{1}{70}$, $h = \dfrac{1}{80}$, $h = \dfrac{1}{100}$.

5) Résoudre numériquement avec la méthode de Runge Kutta 4. *On ne demande pas de coder RK4, mais d'utiliser la fonction Scilab correspondante*

Question 4 : Refaire le même genre d'analyse avec par exemple $k = 50$, $r = 0$ et $y_{ini} = 1$.

∼∼∼∼∼∼

B. Un **système** d'équations différentielles linéaires.

Question : *Un système.*

On considère le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_1(t), \\ y_2'(t) = 2y_1(t) - y_2(t), \\ y_1(0) = 2, \\ y_2(0) = 1. \end{cases}$$

1) Montrer que $(y_1(t), y_2(t)) = (2e^t, 2e^t - e^{-t})$ est la solution de ce système d'EDO. Rappeler la méthode à utiliser pour calculer cette solution.

2) Ecrire les schémas d'Euler explicite et implicite pour ce système et les valider sur l'exemple considéré.

Seconde partie : des équations différentielles **non linéaires**.

Question 1 : Reprendre les **Questions 1** et **2** de la **Première partie**, mais pour le problème de Cauchy :

$$y'(t) = -y(t)^2,$$

avec pour condition initiale $y(0) = 0.5$ (par exemple sur $[0, 1]$).

Résumé de l'utilisation Scilab spécifiques à ces types de problèmes.

- Savoir définir une fonction Scilab.
- Connaître et savoir utiliser la fonction **ode**.
- Savoir dessiner un graphe avec la commande **plot**
- Connaître et savoir utiliser la fonction **fsolve** de Scilab, ou en mettant en oeuvre un algorithme de résolution d'équations non linéaires (utile dans le cas d'une méthode implicite).

Troisième partie : Application et étude qualitative des EDO.

On considère l'équation différentielle ordinaire suivante qui décrit l'évolution de la trajectoire d'un pendule donnée par

$$\theta'' + \alpha\theta' + \sin(\theta) = 0,$$

pour α un paramètre positif donné, avec les conditions initiales suivantes

$$\theta(0) = \theta^0 \text{ et } \theta'(0) = \theta^1.$$

On dit que le pendule est non amorti si $\alpha = 0$ et amorti, sinon.

Question 1.
Etudier l'existence et l'unicité d'une solution.

Question 2 : Cas $\alpha = 0$.
On suppose que l'angle reste petit au cours du temps. On remplace alors $\sin(\theta)$ par θ dans l'équation.

En utilisant la routine Scilab dédiée, mettez en œuvre le schéma de Runge Kutta d'ordre 4 dans ce cas particulier pour $\theta^0 = 0.1$ et $\theta^1 = 0$.
Faire de même lorsque l'on supprime l'hypothèse de petits angles, mais en gardant les mêmes conditions initiales.
Comparer les solutions obtenues. Concluez.

Faire les mêmes tests en utilisant les conditions initiales $\theta^0 = 1.5$ et $\theta^1 = 0$.

Question 3 : Cas $\alpha > 0$.
Reprenez la question précédente dans le cas où $\alpha = 0.1$.

Question 4.
Représentez les portraits de phase correspondants pour les cas $\alpha = 0$ et $\alpha \neq 0$ (on choisira une valeur de α).
Y a-t-il des points d'équilibre et des trajectoires périodiques ?
Que peut-on dire du comportement des trajectoires non périodiques ?

– –

Fonction Scilab spécifique pour tracer les portraits de phase.

- Tracé d'un champ de vecteur avec **fchamp**.

Exercices d'application.

Extension des programmes : Etendre les programmes de la partie A. pour inclure la possibilité de traiter les cas où le membre de droite est donné par une fonction f, éventuellement à valeur vectorielle.

Exercice 1 : *Problèmes raides.* On considère un problème de cinétique chimique de trois espèces entrant en réaction. Les quantités x, y, z représentent les concentrations respectives de chaque espèce de réactifs et vérifient l'équation différentielle ordinaire :

$$\begin{cases} x' = & -k_1 x + k_3 yz \\ y' = & k_1 x - k_3 yz - k_2 y^2 \\ z' = & k_2 y^2 \end{cases}$$

avec $k_1 = 0.04,\ k_2 = 3.10^7,\ k_3 = 10^4$, $x(0) = 1$, $y(0) = 0$ et $z(0) = 0$.

On peut montrer que x, y et z sont des fonctions positives, que x décroît vers 0, que z croît vers 1 et que y croît puis décroît vers 0.

1) Tester ce système jusqu'à $T = 0.3$ avec la méthode d'Euler explicite et avec la méthode RK4 pour $h = 10^{-2}$, $h = 10^{-3}$ et $h = 10^{-4}$.
2) Tester également la méthode d'Euler implicite. *On pourra au choix utiliser la commande "fsolve" de Scilab ou bien faire quelques itérations de Newton.*

Exercice 2 : On considère le problème de Cauchy suivant.

$$\begin{cases} y' = y + \sin(t), \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

avec $t_0 = 0$ et $t_f = 1$.

1) Montrer que $y(t) = -\frac{1}{2}(\sin(t) + \cos(t)) + \frac{1}{2}e^t$ est la solution exacte.

2) Appliquer la méthode d'Euler explicite et d'Euler implicite à cette équation. Vérifier que l'ordre de convergence est de 1. *On visualisera les ordres sur un graphe log-log ou grâce à un tableau de valeurs.*

3) Utiliser l'algorithme de Runge Kutta 4 pour résoudre numériquement ce problème. *On utilisera la fonction directement implémentée dans Scilab.*

Exercice 3 : *Thermodynamique.* On considère un corps, ayant une température interne T, placé dans un environnement avec une température constante égale à T_e. On suppose que sa masse m est concentrée en un seul point. Alors, le transfert de chaleur entre le corps et l'environnement extérieur peut-être décrit par la loi de Stefan-Boltzmann

$$v(t) = \varepsilon\gamma S(T^4(t) - T_e^4),$$

où t est la variable de temps, ε la constante de Stefan-Boltzmann (égale à $5.6*10^{-8} J.m^{-2}.K^{-4}.s^{-1}$) où J représente le Joule, K le Kelvin et m le mètre, s la seconde), γ est la constante d'émissivité du corps, S l'aire de la surface et v le taux de transfert de chaleur. La variation de l'énergie

$\mathcal{E}(t) = mCT(t)$ (où C désigne la chaleur spécifique du matériau constituant le corps) est égale à $-v(t)$.

En conséquence, en posant $T(t) = T_0$, le calcul de T au temps t requiert la résolution de l'équation différentielle ordinaire :

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{v(t)}{mC}.$$

On considèrera que le corps en question est un cube de côté égal à 1 m et masse égale à 1 kg. On suppose que $T_0 = 180K$, $T_e = 200K$, $\gamma = 0.5$ et $C = 100 J.kg^{-1}.K^{-1}$. Comparer les résultats obtenus en utilisant différents pas pour t allant de 0 à 200 secondes.

1) Résoudre cette équation différentielle avec la méthode explicite de votre choix.

2) Que se passe-t-il si l'on tente de résoudre cette équation différentielle ordinaire avec une méthode implicite ? Proposer une résolution.

Exercice 4 : *Un problème d'onde progressive.* On considère le modèle

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + U(1-U)$$

qui est une version dépendante de l'espace de l'équation logistique $\dot{U} = U(1-U)$.

1) Déterminer, pour l'équation logistique $\dot{U} = U(1-U)$, les points stationnaires ainsi que leur stabilité.

On cherche une onde progressive pour ce modèle, c'est-à-dire une solution U de la forme $U(t,x) = u(x-ct)$, telle que $u(-\infty) = 1$, $u(+\infty) = 0$ avec u décroissante. La vitesse c sera supposée positive.

2) Déterminer l'équation différentielle (E_c) satisfaite par u, les points stationnaires ainsi que leur stabilité.

3) Dessiner le portrait de phase associé à (E_c) pour $c = 1$, $c = 2$ et $c = 3$.