Feuille TD-TP : Méthode de Newton.

La méthode de Newton en dimension quelconque. Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, dont on suppose l'existence d'un zéro $\alpha \in \mathbb{R}^d$. On suppose f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^d$ et on note $J_f(x)$ sa matrice jacobienne en $x \in \mathbb{R}^d$.

La méthode de Newton consiste à considérer, si cela est bien défini, la suite (x_n) définie par une initialisation x_0 à choisir et la relation de récurrence

$$x_{n+1} = x_n + \delta x_n, \qquad \text{avec} \quad J_f(x_n)(\delta x_n) = -f(x_n).$$

Théorème : On suppose f de classe $\mathcal{C}^2$ et la matrice $J_f(\alpha)$ inversible. Alors, il existe $r > 0$ et $M > 0$ telles que, si $x_0 \in \bar{B}(\alpha, r)$, la suite (x_n) est bien définie et vérifie $\|x_{n+1} - \alpha\| \leqslant M\|x_n - \alpha\|^2$. La convergence est alors quadratique : on dispose de la majoration d'erreur

$$M\|x_n - \alpha\| \leqslant (M\|x_0 - \alpha\|)^{2^n}.$$

Remarques : La méthode de Newton en dimension quelconque nécessite :
- la connaissance *a priori* d'une solution α.
- que la valeur initiale x_0 soit suffisamment proche de α, comme en dimension 1.
- l'évaluation, à chaque itération, de la fonction f au point x_n, comme en dimension 1.
- contrairement à la dimension 1, la résolution d'un système linéaire à chaque itération, ce qui peut s'avérer coûteux.

Partie TD : Méthode de Newton.

Ex 1. 1) *a)* En dimension $d = 1$, comment peut-on avoir une approximation un peu grossière de la solution que l'on cherche ?
b) Et en dimension $d \geqslant 2$?

2) En dimension $d = 1$, faire des dessins de fonctions f croissantes et convexes/concaves : qu'en déduire sur la convergence de la méthode vis-à-vis de la condition initiale x_0 ? Comparer avec ce qui se passe pour un polynôme scindé sur $\mathbb{R}$.

3) Lorsqu'on met l'algorithme en pratique, comment décider d'arrêter les itérations ?

Ex 2. On se donne $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ possédant une valeur propre simple $\lambda_* \in \mathbb{R}$ (au sens où λ_* est racine simple du polynôme caractéristique de A). On note $x_* \in \mathbb{R}^d$ un vecteur propre associé, avec $|x_*|_2 = 1$. On considère $\phi : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ définie (en vecteurs colonnes) par

$$\phi\left(\begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} Ax - \lambda x \\ |x|_2^2 - 1 \end{pmatrix}.$$

1) *a)* Calculer la Jacobienne de ϕ en $\begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix}$.

b) On suppose A est symétrique. Montrer que $J\phi$ est inversible en $\begin{pmatrix} x_* \\ \lambda_* \end{pmatrix}$.

c) Montrer que $J\phi$ est inversible en $\begin{pmatrix} x_* \\ \lambda_* \end{pmatrix}$ même si A n'est pas symétrique.

2) Écrire la méthode de Newton pour approcher λ_* et x_*. Discuter l'initialisation.

Partie TP : Méthode de Newton.

Ex 3. *Mise en place de la méthode de Newton en dimension 1.*

1) *cf. texte sur les EDO biogaz (2014-B2).* On définit la fonction $\tilde{u}(y) = (1+\kappa-y) - (1+\kappa-u_0)\mathsf{e}^{-y/\kappa}$, avec $\kappa = u_0 = 0.1$. On veut déterminer le(s) zéro(s) y_* de $\tilde{u}$. Comment procéder ?

2) On considère la fonction $g(x) = 10x + \cos(10x) - 1.55$.
a) Lancer l'algorithme de Newton à partir de $x_0 = 0,\ 0.1,\ 0.2$. Qu'observe-t-on ?
b) Dessiner g et expliquer ce qui se passe.

3) *a)* On considère le polynôme $P(x) = x^3 - \frac{47}{7}x^2 + \frac{671}{49}x - \frac{3025}{343}$. Calculer $P(0)$, $P(3)$ et $P(4)$.
b) Sans dessiner P, déterminer numériquement les racines de P et deviner leur multiplicité à l'aide de la vitesse de convergence.
c) Confirmer le résultat en dessinant P.

Ex 4. *Un système non linéaire.* [Demailly] On envisage le système non linéaire

$$\begin{cases} x\mathsf{e}^x + y\mathsf{e}^y & = 0 \\ x^2 + xy - 2y^2 & = 4. \end{cases}$$

1) Comment faire pour deviner s'il y a une/des solutions à ce système ? Si f est la fonction $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sous-jacente, on pourra dessiner $\|f\|$ ou $\|f\|^2$ ou une variante pour limiter les grandes valeurs. [Une étude plus fine permettrait de prouver que le système admet une unique solution.]

2) Essayer de trouver numériquement "la" solution.

Ex 5. *Pour une méthode d'Euler implicite.*
Reprendre la méthode d'Euler implicite pour le système 3×3 du TP sur les EDO :

$$\begin{cases} x' = & -k_1 x + k_3 yz \\ y' = & k_1 x - k_3 yz - k_2 y^2 \\ z' = & k_2 y^2 \end{cases}$$

avec $k_1 = 0.04,\ k_2 = 3.10^7,\ k_3 = 10^4$, $x(0) = 1$ et $y(0) = z(0) = 0$. On peut montrer que x, y et z sont des fonctions positives, que x décroît vers 0, que z croît vers 1 et que y croît puis décroît vers 0.

Le tester jusqu'à $T = 0.3$ avec la méthode d'Euler explicite et $h = 10^{-3},\ h = 10^{-4}$.