M2 Agrégation - UE 8.

TP : Calcul de valeurs propres.

Liste non exhaustive des points **à connaître :**

— *Valeurs propres des matrices, rayon spectral et propriétés, localisation des valeurs propres.*

— *Méthode de la puissance, de la puissance inverse.*

— *Méthode QR, Jacobi pour la recherche de valeurs propres.*

Ex 1. Routines et librairies Scilab/Python Identifier la/les routine/s Scilab/Python permettant de calculer les valeurs propres d'une matrice. Sur quels algorithmes se basent-elles ?

Ex 2. Comparaison des différentes méthodes.

Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & (0) & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ (0) & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$ de taille $n \in \mathbb{N}^*$. On rappelle que les valeurs propres de A sont données par les $\lambda_k = 4\sin^2\left(\dfrac{k\pi}{2(n+1)}\right)$, $1 \leq k \leq n$ et qu'un vecteur propre associé à λ_k est $x_k = \left(\sin\left(\dfrac{k\pi}{n+1}\right), \cdots, \sin\left(\dfrac{jk\pi}{n+1}\right), \cdots, \sin\left(\dfrac{nk\pi}{n+1}\right)\right)^T$.

On choisit $n = 10$.

1) Programmer la méthode de la puissance. Tracer l'évolution de la valeur propre calculée en fonction du nombre d'itérations. Quelle est l'erreur entre le vecteur propre approché et le vecteur propre exact le plus proche ?

2) Même question avec la méthode de la puissance inverse pour calculer la valeur propre λ_1.

3) Utiliser la méthode QR sur cette même matrice. Illustrer la convergence de la suite de matrices obtenue.

Ex 3. Méthode de la puissance : vitesse de convergence et hypothèses de convergence

1) Mettre en évidence la vitesse de convergence de la méthode de la puissance dans les cas suivants (on prendra des matrices dont on connaît explicitement les valeurs propres et on utilisera des graphes log-log) :

— matrice diagonalisable, λ_1 simple,

— matrice diagonalisable, λ_1 non simple,

— matrice non diagonalisable, λ_1 simple,

— matrice non diagonalisable, λ_1 non simple.

On choisira des matrices dont λ_1 est la seule valeur propre de plus grand module.

2) Tester la méthode de la puissance avec comme vecteur initial $x_0 =^t (1,1)$ pour 50, puis 51, puis 52 itérations pour les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

et

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Ex 4. Méthode de la puissance : influence du vecteur initial [LT2].
Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0.5172 & 0.5473 & -1.224 & 0.8012 \\ 0.5473 & 1.388 & 1.353 & -1.112 \\ -1.224 & 1.353 & 0.03642 & 2.893 \\ 0.8012 & -1.112 & 2.893 & 0.05827 \end{pmatrix}$$

dont les valeurs propres sont $\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 2$ et $\lambda_4 = 1$ et des vecteurs propres correspondant à λ_1 et λ_2 respectivement sont $u_1 = \begin{pmatrix} 0.3225 \\ -0.3225 \\ 0.6451 \\ -0.06129 \end{pmatrix}$ et $u_2 = \begin{pmatrix} -0.1290 \\ 0.1290 \\ 0.7419 \\ 0.6451 \end{pmatrix}$.

1) Programmer la méthode de la puissance pour la norme 2 avec comme vecteur initial $x_0 = (1,0,0,0)^T$. Étudier l'évolution de la valeur propre calculée. Tracer l'évolution de la norme de Aq_k en norme 2 en fonction de k.

2) On part maintenant du vecteur initial $x_0 = (1,1,1,1)^T$ qui est presque orthogonal à u_1. Reprendre la question 1) dans ce cas.

3) On part du vecteur initial $x_0 = (1,1,0,0)^T$ qui est orthogonal à u_1 et u_2. Reprendre la question 1) dans ce cas.

Ex 5. Méthode de la puissance inverse et vitesse de convergence.

Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 1.349 & 0.5649 & -0.4573 & 0.5964 \\ 0.5649 & 2.863 & -0.5147 & 0.6596 \\ -0.4573 & -0.5147 & 3.552 & 0.5707 \\ 0.5964 & 0.6596 & 0.5707 & 3.186 \end{pmatrix}$ dont les valeurs propres sont $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 3.95$, $\lambda_3 = 2$ et $\lambda_4 = 1$ et des vecteurs propres correspondant à λ_1 et λ_2 respectivement sont $u_1 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ -1 \\ 1/12 \end{pmatrix}$ et $u_2 = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1) Quel est le taux de convergence de la méthode de la puissance pour calculer λ_1 ? Vérifier la lenteur de la convergence en partant de $x_0 = (1,0,0,0)^T$. Afficher de temps en temps le vecteur propre calculé.

2) On cherche à calculer le vecteur propre associé à λ_2. Calculer le taux de convergence de la méthode de la puissance inverse et en programmer quelques itérations pour les valeurs suivantes de μ : $\mu = 3.96$, $\mu = 3.97$, $\mu = 3.976$. Que dire de la convergence du vecteur propre approché ?

Ex 6. Méthode QR

1) En utilisant la commande Scilab retournant la factorisation QR, observer la convergence de la méthode QR avec la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

2) Recommencer avec $B = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

3) Recommencer avec $D = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Références :

[Ci] P. Ciarlet, *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation,* Dunod.

[Fi] F. Filbet, *Analyse numérique,* Dunod.

[LT1] P. Lascaux, R. Théodor, *Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur, tome 1,* Dunod.

[LT2] P. Lascaux, R. Théodor, *Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur, tome 2,* Dunod.

[QSS] A. Quarteroni, R. Sacco, F. Saleri *Méthodes numériques pour le calcul scientifique* Springer.

[S] M. Schatzman, *Analyse Numérique,* Dunod.