

M2 Agrégation - UE 8.

TD EDO Numériques : éléments de correction et indications.

Ex. 1.

1) Pour la proposition 1.7.

On a

$$\Delta t_n e_n = y(t_{n+1}) - y(t_n) - \Delta t_n \phi(t_n, y(t_n), \Delta t_n).$$

Accroissements finis : $\exists c_n \in]t_n, t_{n+1}[$, $y(t_{n+1}) - y(t_n) = \Delta t_n y'(c_n)$.

Donc

$$e_n = \alpha_n + \beta_n,$$

avec $\alpha_n = f(c_n, y(c_n)) - \phi(c_n, y(c_n), 0)$ et $\beta_n = \phi(c_n, y(c_n), 0) - \phi(t_n, y(t_n), \Delta t_n)$.

Pour $\delta > 0$ fixé. L'uniforme continuité de $(t, \Delta t) \mapsto \phi(t, y(t), \Delta t)$ sur $[t_0, t_0 + T] \times [0, \delta]$ permet de contrôler β_n pour N suffisamment grand (Δt_N^{max} suffisamment petit).

Reconnaître en $\sum_{n=0}^{N-1} \Delta t_n \|\alpha_n\|$ une somme de Riemann pour $(t_n)_{n \in \{0, \dots, N-1\}}$ et $t \mapsto \|f(t, y(t)) - \phi(t, y(t), 0)\|$ et conclure en utilisant que $\left| \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t_n \|e_n\| - \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t_n \|\alpha_n\| \right| \leq \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t_n \|\beta_n\|$.

Ex. 3.

1) Montrer qu'il existe h^* tel que pour tout $(y, \Delta t, t) \in \mathbb{R}^d \times [0, h^*] \times [t_{ini}, t_{ini} + T]$, il existe un unique z tel que $F(y, \Delta t, t, z) = z$.

On note L la constante de Lipschitz de f . Montrer que si $\Delta t \leq \frac{1}{L}$, alors F est contractante. En déduire qu'elle a un unique point fixe.

2) Montrer que la fonction ϕ ainsi définie est bien continue en montrant que le point fixe obtenu en 1) dépend continuellement des données $(y, \Delta t, t)$ (et qu'on a même de la lipschitzianité).

3) Consistance avec la proposition 1.7. Stabilité en utilisant les caractères lipschitzien de f et de la solution au problème de point fixe.

Ex. 4. [G] p. 54-57.

Références :

[CM] M. CROUZEIX, A.L. MIGNOT, *Analyse Numérique des équations différentielles*, Masson.

[D] J-P. DEMAILLY, *Analyse Numérique et Equations Différentielles*, PUG.

[G] T. GOUDON, *Mathématiques pour la modélisation et le calcul scientifique*, Collection Mathématiques et Statistiques, ISTE eds.

[S] M. SCHATZMAN, *Analyse Numérique*, Dunod.