M1 IM/MPA - EDP et Différences Finies.

Éléments de correction du TP : Approximation de l'équation de Poisson 1D par différences finies.

Ex 1. On cherche à approcher numériquement la solution de l'équation de Poisson $-u'' = f$ sur $]0,1[$ avec des conditions aux bords de Dirichlet homogènes $u(0) = u(1) = 0$.

1.a. *En utilisant le schéma aux différences finies centrées vu en cours, résoudre numériquement cette équation avec $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \pi^2 \sin(\pi x)$ pour différentes valeurs du pas de discrétisation.*

Il faut former la matrice A_h du cours et résoudre ensuite un système linéaire.

1.b. *Sur un même graphe, représenter la solution approchée et la solution exacte. Comparer l'évolution pour plusieurs valeurs du pas de discrétisation.*

On doit remarquer que plus le pas diminue plus l'erreur entre la solution approchée et la solution exacte diminue.

1.c. *On reprend les notations du cours. On note donc $U_h = (u_i)_{i\in\{0,\dots,J+1\}}$ les $J+2$ valeurs de l'approximation pour une subdivision uniforme donnée de $J+2$ points de pas $h > 0$. De plus, on notera $U_h^{ex} = (u(x_i))_{i\in\{0,\dots,J+1\}}$.*

Étudier, en fonction de h, l'évolution des erreurs suivantes :

- $\|U_h - U_h^{ex}\|_{h,\infty} = \max\limits_{i\in\{0,\dots,J+1\}} |u_i - u(x_i)|$, norme infinie discrète.
- $\|U_h - U_h^{ex}\|_{h,2} = \left(\sum\limits_{i=0}^{J+1} h |u_i - u(x_i)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$, norme 2 discrète.

Pour chacune de ces normes discrètes, représenter ensuite sur un graphe le logarithme de cette erreur en fonction du logarithme du pas h.

Pour chacune des normes, on doit observer un taux de convergence de 2. Ce qui signifie qu'en graphe log-log, on voit une droite de pente 2.

1.d. *Si on recommence cette étude avec $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 9\pi^2 \sin(3\pi x)$, quels sont les points qui changent ?*

Il y a le second membre et la solution exacte qui changent.

2. *Recommencer cette étude avec $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, telle que $f(x) = 1$, pour $0 < x < \dfrac{1}{2}$ et $f(x) = 0$ pour $\dfrac{1}{2} \leq x < 1$. Commentez.*

Il faut ici faire attention au fait que f est discontinue et donc la solution (si elle existe) n'est pas $\mathcal{C}^2$. On peut chercher une solution exacte $\mathcal{C}^1$.

3. *Tester la résolution pour des conditions aux bords de Dirichlet non homogènes, par exemple $u(0) = 0$ et $u(1) = 1$.*

Il suffit d'adapter le raisonnement utilisé en cours pour construire la matrice. Ici, la matrice ne change pas (ni de taille, ni d'expression). Par contre la dernière coordonnée du vecteur $F_h \in \mathbb{R}^J$ est translatée de $\frac{1}{h^2}$.

4. *Envisager la résolution de cette équation avec des conditions de Neumann homogènes $u'(0) = u'(1) = 0$ où on impose également $\displaystyle\int_0^1 f = 0$. Que se passe-t-il ?*

Dans ce cas, la condition sur l'intégrale assure existence d'une solution, par contre on n'a pas unicité. Si on impl émente naïvement, on se retrouve tout naturellement avec une matrice non inversible.

Ex 2. On s'intéresse à la résolution du problème suivant :

$$\begin{cases} -u'' + qu = f & \text{sur }]0,1[, \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

avec q une fonction continue positive donnée.

1. *Proposez un schéma aux différences finies pour ce problème en s'inspirant de celui pour l'équation de Poisson. Est-ce que ce schéma admet une unique solution ?*

Il suffit de rajouter aux équation discrète un terme u_i pour $i \in \{1, ..., J\}$. Sur la matrice du problème dircétisé, cela se traduit simplement par une coefficient q en plus de $\frac{2}{h^2}$ sur la diagonale.

2. *Programmer et tester le schéma pour plusieurs fonctions f et q.*