M1 IM/MPA : TD EDP et Différences Finies.

Feuille 1 : EDO Numériques.

Ex 1. Une EDO linéaire...

1) On considère l'équation différentielle $y' = 3y - 1$ sur l'intervalle $[0, 10]$, avec pour donnée initiale soit $y(0) = \dfrac{1}{3}$ soit $y(0) = \dfrac{1}{3} + \varepsilon$. Déterminer la valeur de la solution de chacun des problèmes de Cauchy associés en $t = 10$. Que conclure ?

2) On considère l'équation différentielle $y' = -150y + 50$ sur l'intervalle $[0, 1]$, avec pour donnée initiale soit $y(0) = \dfrac{1}{3}$ soit $y(0) = \dfrac{1}{3} + \varepsilon$. Déterminer la valeur de la solution de chacun des problèmes de Cauchy associés en $t = 1$. Que conclure ?

Montrer que le schéma d'Euler explicite avec un pas constant conduit à

$$y_n - \frac{1}{3} = (1 - 150\Delta t)^n \left(y_0 - \frac{1}{3} \right).$$

Avec $\Delta t = \dfrac{1}{50}$ et $y(0) = \dfrac{1}{3} + \varepsilon$, quelle approximation de $y(1)$ obtient-on ? Que conclure ?

Ex 2. Schéma dans le cas vectoriel

1) On considère le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_2(t) + y_1(t), \\ y_2'(t) = y_1(t) + t, \\ y_1(1) = 2, \\ y_2(1) = 1. \end{cases}$$

Ecrire les schémas d'Euler explicite, implicite et Crank-Nicolson sur cet exemple.

2) On considère les équations différentielles suivantes :

$$\begin{cases} y^{(3)}(t) = y^{(2)}(t) + y'(t) - y(t) + 1, \\ y(0) = 2, \\ y'(0) = 2, \\ y^{(2)}(0) = 1. \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} y^{(2)}(t) = t^2 + (y(t))^2 + 1, \\ y(1) = 0, \\ y'(1) = 2, \end{cases}$$

Ecrire les schémas d'Euler explicite.

Ex 3. Lemme de Grönwall discret
Montrer le lemme de Grönwall discret : Soit $(u_n)_{n\geq 0}$, $(v_n)_{n\geq 0}$ et $(a_n)_{n\geq 0}$ des suites à termes réels positifs. Si pour tout $n \geq 0$,

$$u_{n+1} \leq a_n + (1+v_n)u_n,$$

alors pour tout $n \geq 1$,

$$u_n \leq \exp\left(\sum_{k=0}^{n-1} v_k\right) u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \exp\left(\sum_{l=k+1}^{n-1} v_l\right) a_k.$$

Ex 4. Exemple de calcul de consistance et/ou convergence.

On définit le schéma de Heun comme suit :

Schéma de Heun
Pour $n \in \{0, ..., N-1\}$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= y_n + \Delta t_n f(t_n, y_n), && (1)\\ y_{n+1} &= y_n + \frac{\Delta t_n}{2}\left(f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, v_{n+1})\right), && (2)\\ y_0 & \quad \text{donné}. && (3) \end{aligned}$$

Pour répondre aux questions suivantes on pourra ajouter des hypothèses sur f nécessaires aux preuves et on s'intéressera également aux ordres.

1) La méthode de Heun, est-elle explicite ou implicite ? Etudier son erreur de consistance. Montrer qu'elle converge. Quel est l'ordre de convergence ?

2) La méthode de Crank-Nicolson est elle explicite ou implicite ? Etudier son erreur de consistance.

Ex 5. Cas des problèmes dissipatifs

On suppose que f est continue et globalement Lipschitzienne par rapport à la variable d'état et uniformément par rapport à la variable de temps sur $\mathcal{U} := \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ et que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{U}$. On suppose de plus que le problème est *dissipatif* où

Definition 0.1. *On dit que le problème est dissipatif, si la fonction f vérifie*

$$(f(t, y_1) - f(t, y_2), y_1 - y_2) \leq 0, \ \forall (t, y_1) \in \mathcal{U}, (t, y_2) \in \mathcal{U}.$$

On a la proposition

Proposition 0.2. *Si f est différentiable, alors le problème est dissipatif si $\forall (t, y) \in \mathcal{U}$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^d$, on a*

$$\nabla_y f(t, y)\xi \cdot \xi \leq 0.$$

Montrer que le schéma d'Euler implicite est bien défini et converge à l'ordre 1.