M1 IM/MPA : TD EDP et Différences Finies.

Feuille 2 : Différences finies et équation de Poisson.

Ex 1. Différences finies.

On rappelle l'expression du polynôme d'interpolation de Lagrange.

On suppose que $n \in \mathbb{N}^*$ *et on se donne* $(w_i, z_i)_{i\in\{0,..,n\}} \in \mathbb{R}^{2(n+1)}$, $(n+1)$ *points d'interpolation.*

L'unique polynôme d'interpolation p_n *de degré au plus* n *est donné par la formule de Lagrange*

$$p_n = \sum_{k=0}^{n} z_k L_k, \tag{1}$$

où pour $k \in \{0,..,n\}$, $L_k(X) = \prod_{j=0, j\neq k}^{n} \frac{X - w_j}{w_k - w_j}$.
Le polynôme d'interpolation d'une fonction f *donnée, aux points* $(w_i)_{i\in\{0,...,n\}}$, *est le polynôme d'interpolation aux points d'interpolation* $(w_i, f(w_i))_{i\in\{0,..,n\}}$.

On considère un intervalle $[a, b]$, avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $a < b$. Soit $(x_i)_{i\in\{0,..,L+1\}}$ une subdivision uniforme de $[a, b]$, de pas $h > 0$ donné. On se donne également une fonction f $\mathcal{C}^3$ sur $[a, b]$ dont on cherche à approcher la valeur de la dérivée première aux points $(x_i)_{i\in\{1,..,L\}}$ et la valeur de la dérivée seconde en ces mêmes points de subdivision.

1) Soit $i \in \{1, .., L\}$. Donner l'expression du polynôme d'interpolation p de f aux points x_i et x_{i+1}. On décide alors d'approcher la valeur de f' au point x_i, par $p'(x_i)$. Comment s'appelle cette formule ?

2) Soit $i \in \{1, .., L\}$. Donner l'expression du polynôme d'interpolation q de f aux points x_{i-1} et x_i. On décide alors d'approcher la valeur de f' au point x_i, par $q'(x_i)$. Comment s'appelle cette formule ?

3) Soit $i \in \{1, .., L\}$. Donner l'expression du polynôme d'interpolation r de f aux points x_{i-1}, x_i et x_{i+1}. On décide alors d'approcher la valeur de f' au point x_i, par $r'(x_i)$. Comment s'appelle cette formule ?

4) Soit $i \in \{2, .., L+1\}$. Donner l'expression du polynôme d'interpolation s de f aux points x_{i-2}, x_{i-1} et x_i. On décide alors d'approcher la valeur de f' au point x_i, par $s'(x_i)$.

5) Reprendre l'expression du polynôme de la question 3). On souhaite maintenant, pour $i \in \{1, .., L\}$, approcher la valeur de f'' en x_i par $r''(x_i)$. Quel est le nom de cette formule ?

6) Sur le même principe que 5), reprendre la question 4) pour approcher la valeur de f'' en x_i.

7) Quelle pourrait-être une façon de calculer l'erreur commise par ces approximations ?

8) Montrer à la main que la formule obtenue en 4) est d'ordre 1.

Ex 2. On cherche à tester quelques formules aux différences finies classiques. Ainsi, on cherche à évaluer numériquement la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f = \exp$ au point 0.

1) Quelle est la valeur exacte de cette dérivée ?

2) Effectuer le calcul avec la formule des différences finies avant (à droite) et un pas $h = 0.1$ et un pas $h = 0.05$. Estimer l'erreur dans chaque cas et en déduire une estimation numérique de l'ordre d'approximation.

3) Faire de même avec la formule des différences finies centrées.

Ex 3. Solution exacte.

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, avec $a < b$. On se donne une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, de régularité à préciser. On considère le problème modèle de l'équation de Poisson sur l'intervalle $]a, b[$ avec des conditions aux bords de type Dirichlet i.e. on s'intéresse à la résolution du problème suivant :

$$\mathcal{P}$$

Trouver $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ *solution de*

- $-u''(x) = f(x)$, pour tout x dans $]a, b[$,
- $u(a) = 0$, $u(b) = 0$ (dites *conditions de Dirichlet homogènes*).

1) En s'inspirant de ce qui a été fait en cours, donner la solution exacte de ce problème. On précisera au besoin des conditions à imposer à f.

2) Votre raisonnement est-il généralisable à des conditions de Dirichlet non homogènes (i.e. $u(a) = \alpha$, $u(b) = \beta$, avec α et β deux réels donnés) ?

3) Votre raisonnement est-il généralisable à des conditions du type $u'(0) = u'(1) = 0$ (dites *conditions de Neumann homogènes*) ?

Ex 4. Valeurs propres et vecteurs propres de A_h.

On s'intéresse à la matrice $A_h = \dfrac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & (0) & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ (0) & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$ de taille J, avec $j \in \mathbb{N}^*$.

Quelles sont les valeurs propres et vecteurs propres associés à cette matrice ?

Ex 5. Convergence du schéma en norme 2

On suppose que $f \in \mathcal{C}^2([0,1])$ (i.e. $u \in \mathcal{C}^4([0,1])$).

On s'intéresse au problème suivant :

$$\mathcal{P}_h$$

$$\textit{Trouver } (u_i)_{i\in\{0,\ldots,J+1\}} \textit{solution de}$$

- $-\dfrac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} = f(x_i)$, pour tout $i \in \{1, \cdots, J\}$,
- $u_0 = 0$, $u_{J+1} = 0$.

1) Montrer que le schéma est consistant d'ordre 2, en norme 2.

2) Montrer que pour tout $V \in \mathcal{V}$,

$$\sum_{i=1}^{J} h|V_i|^2 \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{J+1} h \left| \frac{V_i - V_{i-1}}{h} \right|^2 .$$

3) Montrer que le schéma $\mathcal{P}_h$ converge en norme 2 à l'ordre 2, i.e. qu'il existe $C > 0$ (indépendante des paramètres de discrétisation) telle que pour h suffisamment petit

$$\left(\sum_{i=0}^{J+1} h|u(x_i) - (U_h)_i|^2 \right)^{1/2} \leq Ch^2.$$

On montrera également que C dépend de la norme infinie de $u^{(4)}$ sur $[0,1]$.

Ex 6. Autres conditions aux bords

Étudier le cas où le problème de départ est écrit pour les conditions aux bords suivantes $u(0) = \alpha$, $u(1) = \beta$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ (*Conditions de Dirichlet non homogènes*).