M1 IM/MPA : TD EDP et Différences finies.

Feuille 3 : Equation de la chaleur.

Ex 1. Cas de la convergence en norme 2

On suppose que $u \in \mathcal{C}^4([0,T]\times[0,1])$. On considère le schéma explicite pour l'équation de la chaleur donné en cours.

1) Montrer que ce schéma est consistant d'ordre 2 en espace et 1 en temps, en norme 2 discrète en espace et norme infinie en temps.

2) Montrer que si $\dfrac{\Delta t}{h^2} \leq \dfrac{1}{2}$ alors ce schéma est stable en norme 2 discrète en espace et norme infinie en temps.

3) Montrer que si l'hypothèse $\dfrac{\Delta t}{h^2} \leq \dfrac{1}{2}$ est vérifiée alors ce schéma converge en norme 2 discrète en temps et norme infinie en espace à l'ordre 1 en temps et 2 en espace.

Ex 2. Schéma de Crank-Nicolson

On s'intéresse à la résolution du problème discret suivant :

$$\mathcal{C}^{CN}_{h,\Delta t}$$

Pour tout $n \in [0,N]$, trouver $(u_i^n)_{i\in\{0,\cdots,J+1\}}$ solution de

- $\dfrac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\Delta t} = \dfrac{u_{i+1}^{n+1/2} - 2u_i^{n+1/2} + u_{i-1}^{n+1/2}}{h^2}$, pour tout $i \in \{1,\cdots,J\}$,
- $u_0^n = 0$, $u_{J+1}^n = 0$, pour tout $n \in \{0,...,N\}$,
- $u_i^0 = u_0(x_i)$, pour tout $i \in \{0,...,J+1\}$.

où $u_i^{n+1/2} = \dfrac{u_i^n + u_i^{n+1}}{2}$, pour tout $i \in \{0,...,J+1\}$.

1) Ce schéma est il explicite ou implicite ?

2) Montrer la stabilité de ce schéma en norme 2 discrète en espace et norme infinie en temps. *On pourra supposer dans un premier temps que $u \in \mathcal{C}^\infty([0,T]\times[0,1])$, puis on pourra ensuite affiner cette hypothse.*

Ex 3. Une généralisation

En s'inspirant des schémas vus en cours proposer un schéma numérique pour l'équation

$$\partial_t u = \kappa \partial^2_{xx} u + f$$

avec $\kappa > 0$ et $f \in C^\infty([0,1])$.