M1 IM/MPA : TP EDP et Différences Finies.

Feuille 1 : EDO Numériques.

Ex 1 Un exemple d'EDO scalaire

On considère l'équation différentielle ordinaire donnée par le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} y'(t) = -ky(t) + r, \\ y(t_0) = y_{ini}. \end{cases}$$

sur l'intervalle de temps $[t_0, t_f]$, avec $t_0 \in \mathbb{R}$ et $t_f > t_0$, $k > 0$, $r \in \mathbb{R}$, $y_{ini} \in \mathbb{R}$.

1. *Programmation de la méthode d'Euler explicite.*

(a) Construire une fonction Scilab qui à k, r, t_0, t_f, y_{ini} et N, renvoie la suite $(y_n)_{n\in[0,N]}$ des valeurs approchées de la solution y aux temps $(t_n)_{n\in[0,N]}$ par la méthode d'Euler explicite.

(b) Validation.

Tester vos programmes sur, par exemple, le problème de Cauchy (I) suivant :

$$\begin{cases} y'(t) = -y(t), \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

avec $t_0 = 0$ et $t_f = 1$, et donc $k = 1$, $r = 0$, $y_{ini} = 1$.

On pourra entre autre :

(i) Tracer les valeurs approchées et la courbe de la solution exacte en fonction du temps.
(ii) Tracer la courbe représentative de la valeur absolue de l'erreur entre la solution exacte et la solution approchée au cours du temps.
(iii) Faire plusieurs simulations pour plusieurs valeurs du pas de discrétisation $h > 0$ (ou valeurs de N) et tracer ensuite la courbe représentative du maximum de l'erreur sur $[t_0, t_f]$, en fonction du pas h. Faire le même graphe en échelles logarithmiques. En déduire graphiquement les ordres des méthodes d'approximation utilisées.
(iv) Proposez un calcul permettant de visualiser l'ordre grâce à un tableau de valeurs.

2. *Programmation de la méthode d'Euler implicite.*

(a) Construire une fonction Scilab qui à k, r, t_0, t_f, y_{ini} et N, renvoie la suite $(y_n)_{n\in[0,N]}$ des valeurs approchées de la solution y aux temps $(t_n)_{n\in[0,N]}$ par la méthode d'Euler implicite. *On pourra aussi l'inclure dans la première fonction Scilab.*

(b) Reprendre les étapes de **Validation** de **1. (b)**.

3. *Comparaison des schémas sur des problèmes raides.*

On considère le cas : $k = 150$, $r = 30$, $y_{ini} = \frac{1}{5}$, $t_0 = 0$, $t_f = 1$.

(a) Donner la solution exacte de cette équation différentielle ordinaire sur $[0, 1]$.

(b) (i) Montrer que si la donnée initiale est modifiée en $y(0) = \frac{1}{5} + \varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$, la solution exacte de cette équation différentielle ordinaire devient : $y(t) = \frac{1}{5} + \varepsilon e^{-150t}$.

(ii) Tester la résolution de ce problème avec la méthode d'Euler explicite et les paramètres $h = \frac{1}{50}$, $\varepsilon = 10^{-10}$ et $t_f = 1$. Commentez.

(iii) Que se passe-t-il pour la méthode d'Euler implicite et les mêmes choix de paramètres qu'en 2)b) ?

(iv) Observer ce qu'il se passe pour la méthode d'Euler explicite et $h = \frac{1}{70}$, $h = \frac{1}{80}$, $h = \frac{1}{100}$.

(v) Résoudre numériquement avec la méthode de Runge Kutta 4. *On ne demande pas de coder RK4, mais d'utiliser la fonction Scilab correspondante*

4. Reprendre cette analyse avec par exemple $k = 50$, $r = 0$ et $y_{ini} = 1$.

Ex 2 Un système d'équations différentielles linéaires.

1. On considère le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_1(t), \\ y_2'(t) = 2y_1(t) - y_2(t), \\ y_1(0) = 2, \\ y_2(0) = 1. \end{cases}$$

(a) Montrer que $(y_1(t), y_2(t)) = (2e^t, 2e^t - e^{-t})$ est la solution de ce système d'EDO. Rappeler la méthode à utiliser pour calculer cette solution.

(b) Écrire les schémas d'Euler explicite et implicite pour ce système et les valider sur l'exemple considéré.

Ex 3 Des équations différentielles non linéaires.
Reprendre les Questions **1** et **2** de l'exercice 1, mais pour le problème de Cauchy :

$$y'(t) = -y(t)^2,$$

avec pour condition initiale $y(0) = 0.5$ (par exemple sur $[0, 1]$).