M1 IM/MPA - EDP et Différences Finies.

TP : Approximation de l'équation de Poisson 1D par différences finies.

Ex 1. On cherche à approcher numériquement la solution de l'équation de Poisson $-u'' = f$ sur $]0,1[$ avec des conditions aux bords de Dirichlet homogènes $u(0) = u(1) = 0$.

1.a. En utilisant le schéma aux différences finies centrées vu en cours, résoudre numériquement cette équation avec $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \pi^2 \sin(\pi x)$ pour différentes valeurs du pas de discrétisation.

1.b. Sur un même graphe, représenter la solution approchée et la solution exacte. Comparer l'évolution pour plusieurs valeurs du pas de discrétisation.

1.c. On reprend les notations du cours. On note donc $U_h = (u_i)_{i\in\{0,\dots,J+1\}}$ les $J+2$ valeurs de l'approximation pour une subdivision uniforme donnée de $J+2$ points de pas $h > 0$. De plus, on notera $U_h^{ex} = (u(x_i))_{i\in\{0,\dots,J+1\}}$.

Étudier, en fonction de h, l'évolution des erreurs suivantes :

- $\|U_h - U_h^{ex}\|_{h,\infty} = \max\limits_{i\in\{0,\dots,J+1\}} |u_i - u(x_i)|$, norme infinie discrète.
- $\|U_h - U_h^{ex}\|_{h,2} = \left(\sum\limits_{i=0}^{J+1} h|u_i - u(x_i)|^2\right)^{\frac{1}{2}}$, norme 2 discrète.

Pour chacune de ces normes discrètes, représenter ensuite sur un graphe le logarithme de cette erreur en fonction du logarithme du pas h.

1.d. Si on recommence cette étude avec $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 9\pi^2 \sin(3\pi x)$, quels sont les points qui changent ?

2. Recommencer cette étude avec $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, telle que $f(x) = 1$, pour $0 < x < \dfrac{1}{2}$ et $f(x) = 0$ pour $\dfrac{1}{2} \le x < 1$. Commentez.

3. Tester la résolution pour des conditions aux bords de Dirichlet non homogènes, par exemple $u(0) = 0$ et $u(1) = 1$.

4. Envisager la résolution de cette équation avec des conditions de Neumann homogènes $u'(0) = u'(1) = 0$ où on impose également $\displaystyle\int_0^1 f = 0$. Que se passe-t-il ?

Ex 2. On s'intéresse à la résolution du problème suivant :

$$\begin{cases} -u'' + qu = f & \text{sur }]0,1[, \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

avec q une fonction continue positive donnée.

1. Proposez un schéma aux différences finies pour ce problème en s'inspirant de celui pour l'équation de Poisson. Est-ce que ce schéma admet une unique solution ?

2. Programmer et tester le schéma pour plusieurs fonctions f et q.