M1 IM/MPA : TD EDP Diffrences finies.

Indications de correction, Feuille 1 : EDO Numériques.

Ex 1. Une EDO linéaire...

Ex 2. Schéma dans le cas vectoriel

Ex 3. Lemme de Grönwall discret

Ex 4. Exemple de calcul de consistance et/ou convergence.

2) La méthode de Crank-Nicolson est implicite. On peut même s'intéresser à la preuve de convergence, et on peut montrer que le schém converge à l'ordre 2, sous de bonnes hypothèses sur f.
La démonstration est très analogue au schéma de Heun. On commence par découper l'erreur en deux bouts : $e_n = y_n - \hat{y}_n + \hat{y}_n - y(t_n)$, avec $\hat{y}_n = y(t_{n-1}) + \frac{\Delta t}{2}\left(f(t_{n-1}, y(t_{n-1})) + f(t_n, y(t_n))\right)$. L'étude du terme $\hat{y}_n - y(t_n)$ se fait à l'aide d'un développement de Taylor. Pour le second terme, on utlise le caractère lipschitzien de f. Un Lemme de type Grönwall discret permet alors de conclure.

Ex 5. Cas des problèmes dissipatifs

On suppose que f est continue et globalement Lipschitzienne par rapport à la variable d'état et uniformément par rapport à la variable de temps sur $\mathcal{U} := \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ et que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{U}$. On suppose de plus que le problème est *dissipatif* où

Definition 0.1. *On dit que le problème est dissipatif, si la fonction f vérifie*

$$(f(t, y_1) - f(t, y_2), y_1 - y_2) \leq 0, \; \forall (t, y_1) \in \mathcal{U}, (t, y_2) \in \mathcal{U}.$$

On a la proposition

Proposition 0.2. *Si f est différentiable, alors le problème est dissipatif si $\forall (t, y) \in \mathcal{U}$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^d$, on a*

$$\nabla_y f(t, y)\xi \cdot \xi \leq 0.$$

Pour montrer que le schéma d'Euler implicite est bien défini, on peut envisager 2 voies. La première réduit le problème à un problème de recherche de point fixe. En utilisant le caractère Lipschitzien de f, quitte à réduire le pas Δt, on peut montrer que le problème est contractant. L'autre voie consiste à introduire la fonction $F_n : (\Delta t, y) \mapsto y - y_n - \Delta t f(t_n + \Delta t, y)$. On remarque que $(0, y_n)$ est un zéro de F_n. On applique le théorème des fonctions implicites à F_n (la Jacobienne est inversible puisque le problème est dissipatif). On construit ainsi la solution pour un Δt suffisamment petit. On peut en fait même montrer que le schéma est bien défini sans restriction sur le pas de temps (plus difficile).

Pour montrer la convergence, on étudie les deux quantités : $e_n^c = \hat{y}_n - y(t_n)$, et $e_n^s = y_n - \hat{y}_n$, avec $\hat{y}_n = y(t_{n-1}) + \Delta t f(t_n, y(t_n))$, pour pouvoir étudier ensuite $e_n = e_n^s + e_n^c$. Pour e_n^c, on utilise une formule de Taylor. Pour e_n^s, on montre qu'il existe $\xi_n \in (y_n, y(t_n))$, tel que $e_n^s = e_{n-1} + \Delta t \dfrac{\partial f}{\partial y}(t_n, \xi_n) \cdot e_n$.

Puis, on écrit $e_n = e_n^c + \Delta t \dfrac{\partial f}{\partial y}(t_n, \xi_n) e_n + e_{n-1}$. En multipliant par e_n l'égalité, on trouve $e_n^2 = e_n^c e_n + \Delta t \dfrac{\partial f}{\partial y}(t_n, \xi_n) e_n \cdot e_n + e_{n-1} e_n$, et donc comme le problème est dissipatif, on déduit que

$$e_n^2 \leq e_n^c e_n + e_{n-1} e_n.$$

Ceci permet de déduire que $|e_n| \leq |e_n^c| + |e_{n-1}|$. La suite des arguments ressemble alors à la preuve de convergence dans le cas d'Euler explicite.