**M1 IM/MPA : TP EDP et Différences finies.**

## Feuille 1 : Éléments de correction du TP EDO Numériques.

### Ex 1 Un exemple d'EDO scalaire

On considère l'équation différentielle ordinaire donnée par le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} y'(t) = -ky(t) + r, \\ y(t_0) = y_{ini}. \end{cases}$$

sur l'intervalle de temps $[t_0, t_f]$, avec $t_0 \in \mathbb{R}$ et $t_f > t_0$, $k > 0$, $r \in \mathbb{R}$, $y_{ini} \in \mathbb{R}$.

**1.** *Programmation de la méthode d'Euler explicite.*

(iii) On doit voir que l'erreur diminue lorque $h$ diminue. En échelles logarithmiques, on doit visualiser une droite de pente l'ordre de la méthode (ici 1)

(iv) Il suffit de calculer pour des jeux de deux simulations successives de pas $\Delta t_1$ et $\Delta t_2$, la quantité

$$p_{num} = \frac{\log\left(\dfrac{\max(erreur(\Delta t_1))}{\max(erreur(\Delta t_2))}\right)}{\log\left(\dfrac{\Delta t_1}{\Delta t_2}\right)}$$

**2.** *Programmation de la méthode d'Euler implicite.*

**(a)** On peut à chaque itération trouver une expression de $y_{n+1}$ en fonction de $y_n$.

**3.** *Comparaison des schémas sur des problèmes raides.*

Le but de cet exercice est de voir comment les chémas d'Euler explicite et implicites, "réagissent" à une perturbation de la condition initiale, si l'EDO est "raide" (représenté ici, par le fait que $k$ est grand)

**(a)** La solution exacte de cette équation différentielle ordinaire sur $[0, 1]$ est la fonction constante $\frac{1}{5}$.

**(b)** (i) Il suffit d'injecter l'expression donnée dans le problème de Cauchy et vérifier que c'est bien solution. On remarque que cette solution est trs proche de $\frac{1}{5}$ et s'écrase trs vite sur $\frac{1}{5}$.

(ii) On teste la résolution de ce problème avec la méthode d'Euler explicite et les paramètres $h = \dfrac{1}{50}$, $\varepsilon = 10^{-10}$ et $t_f = 1$. On observe que la solution approchée présente de grosses oscillations, autour de la solution exacte, qui s'amplifient avec le temps.

(iii) Pour la méthode d'Euler implicite et les mêmes choix de paramètres qu'en 2)b), on n'observe pas ce même phénomène. Le schéma d'Euler implicite a mieux résisté à la perturbation.

(iv) Pour la méthode d'Euler explicite, une façon de réduire ces oscillations est de diminuer le pas d'espace. En diminuant les valeurs de $h$ successivement via $h = \frac{1}{70}$, $h = \frac{1}{80}$, $h = \frac{1}{100}$, on observe une réduction de ces oscillations et une amélioration de l'approximation. Ne pas oublier, qu'ici, le schéma d'Euler explicite converge ! On sait donc qu'à mesure que l'on diminue le pas de temps (en fixant les autres paramètres du problème), l'approximation devient meilleure (l'erreur tend vers 0).

(v) Pour la méthode de Runge Kutta 4, on pourrait, comme dans la question précédente, visualiser l'ordre via un graphe log-log. On devrait alors voir une droite de pente 4.

**Ex 2 Un système d'équations différentielles linéaires.**

**1.** On considère le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_1(t), \\ y_2'(t) = 2y_1(t) - y_2(t), \\ y_1(0) = 2, \\ y_2(0) = 1. \end{cases}$$

**(b)** On peut écrire le schéma sous forme matricielle. La mise en oeuvre d'Euler implicite va nécessiter la résolution d'un système linéaire (une inversion de matrice) à chaque itération.

**Ex 3 Des équations différentielles non linéaires.**
On considère le problème de Cauchy :

$$y'(t) = -y(t)^2,$$

avec pour condition initiale $y(0) = 0.5$ (par exemple sur $[0, 1]$).

La mise en oeuvre de l'algorithme pour Euler explicite ne doit pas poser plus de problèmes. Pour le cas d'Euler implicite, on est amené à résoudre une équation non linéaire à chaque itération. À l'itération $n$, étant donné $y_n$, la subdivision $(t_n)$, le pas $\Delta t$, on cherche à trouver $y_{n+1}$ solution de

$$y_{n+1} - y_n + \Delta t y_{n+1}^2.$$

Une façon de trouver une approximation de $y_{n+1}$ est de mettre en œuvre, à chaque itération, une méthode de Newton sur la fonction $F_n : z \mapsto z - y_n + \Delta t z^2$, en initialisant l'algorithme de Newton avec $y_n$.