Algèbre linéaire sur $\mathbb{Z}$.

Ex 1 : $u = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -11 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

a) On échelonne (sur $\mathbb{Z}$) en colonnes les 3 vecteurs :

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ 2 & 7 & 1 \\ 2 & -11 & -5 \\ -3 & 3 & 3 \\ -1 & 10 & 4 \end{pmatrix} \underset{C_1 \leftrightarrow C_3}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 5 & 4 \\ 1 & 7 & 2 \\ -5 & -11 & 2 \\ 3 & 3 & -3 \\ 4 & 10 & -1 \end{pmatrix} \underset{\substack{C_2 \leftarrow C_2 + 5C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 + 4C_1}}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 12 & 6 \\ -5 & -36 & -18 \\ 3 & 18 & 9 \\ 4 & 30 & 15 \end{pmatrix} \underset{\substack{C_2 \leftrightarrow C_3 \\ C_3 \leftarrow C_3 - 2C_2}}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 \\ -5 & -18 & 0 \\ 3 & 9 & 0 \\ 4 & 15 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le principe est le suivant :
On travaille ligne après ligne. On fait des opérations sur les colonnes pour faire apparaître le pgcd des éléments de la 1ère ligne en haut à gauche puis on met des zéros à sa droite. Puis on recommence sur la matrice des colonnes suivantes.

Ex : pgcd $(4,5,-1) = 1$ donc on met le -1 à gauche.
pgcd $(12,6) = 6$ ——— 6 ———

Une base de E est $w = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -18 \\ 9 \\ 15 \end{pmatrix} = u + 4w =: u'$

b) On résout le système : $\alpha w + \beta u' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{cases} -\alpha = 1 \\ \alpha + 6\beta = 1 \\ -5\alpha - 18\beta = -1 \\ 3\alpha + 9\beta = 0 \\ 4\alpha + 15\beta = 1 \end{cases}$$

qui admet pour unique solution $\alpha = -1$, $\beta = \frac{1}{3}$

Le vecteur est donc CL à coeff rationnels et pas entiers de u', w et donc a fortiori de u, v, w.

c) Un vecteur $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ s \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^5$ est dans E ssi le système

$\alpha w + \beta u' = X$ admet une unique solution $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}$.

Or, ce système est : on l'échelonne (en lignes)

$$\begin{cases} -\alpha = x \\ \alpha + 6\beta = y \\ -5\alpha - 18\beta = z \\ 3\alpha + 9\beta = s \\ 4\alpha + 15\beta = t \end{cases} \iff \begin{cases} -\alpha = x \\ 6\beta = x + y \\ -18\beta = z - 5x \\ 9\beta = s - 3x \\ 15\beta = t + 4x \end{cases}$$

Pour ramener les 4 dernières équations en une seule, on fait apparaître le pgcd $(6, -18, 9, 15) = 3$.

$$\iff \begin{cases} -\alpha = x \\ -3\beta = 4x + y - s & (L_2 - L_4) \\ -18\beta = z - 5x \\ 9\beta = s - 3x \\ 15\beta = t + 4x \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -\alpha = x \\ -3\beta = 4x + y - s \\ 0 = -29x - 6y + 6s + z \\ 0 = 9x + 3y - 2s \\ 0 = 24x + 5y - 5s + t \end{cases}$$

$X \in E$ ssi $\begin{cases} 4x + y - s \equiv 0 [3] \\ -29x - 6y + 6s + z = 0 \\ 9x + 3y - 2s = 0 \\ 24x + 5y - 5s + t = 0 \end{cases}$

N.B. : les 3 dernières éq sont celles du $\mathbb{Q}$-ev engendré par (u, v, w). Il y en a $3 = 5 - 2$ (5 comme $\mathbb{Z}^5$, 2 car $E_\mathbb{Q}$ est de dim 2)

Il y a ici une équation modulaire en plus liée au fait que la forme de Smith de la matrice $[w|u']$ est $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

d) Le système $\begin{cases} x + 2y + z \equiv 0 [5] \\ 3x + 2t = 0 \end{cases} \iff \exists k \in \mathbb{Z}, \quad (*) \begin{cases} x + 2y + z - 5k = 0 \\ 3x + 2t = 0 \end{cases}$

On va déterminer une base de $\left\{ \tilde{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ s \\ t \\ k \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^6, \text{ tq } (*) \right\}$

puis projeter sur $\mathbb{Z}^5$ pour avoir une base de F.

$$\begin{cases} x + 2y + z - 5k = 0 \\ 3x \qquad + 2t = 0 \end{cases}$$ On échelonne $\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + z - 5k = 0 \\ -6y - 3z + 2t - 15k = 0 \end{cases}$ (3)

Pour obtenir une base, le but est d'exprimer une inconnue en fonction des autres. C'est le cas pour la première équation

$x = -2y - z + 5k$.

Mais pas pour la seconde.

Pour y arriver, il faut arriver à écrire une équation où le coefficient d'une variable est le pgcd des autres. Concrètement ici, il faut arriver à faire apparaître le coefficient $\operatorname{pgcd}(-6, -3, 2, -15) = 1$.

Pour cela, on fait des changements de variables qui traduisent les opérations sur les colonnes dans l'algo de Smith.

Avec le $-3z$ et le $2t$ on peut faire apparaître un "1". On pose

$z' = z - t$ ie $z = z' + t$

$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + z' + t - 5k = 0 \\ -6y - 3z' - t - 15k = 0 \end{cases}$

ie $\begin{cases} x = -2y - z' - t + 5k \\ t = -6y - 3z' - 15k \end{cases}$.

On trouve une base en faisant $y = 1, z' = 0, s = 0, k = 0$

$y = 0, z' = 1, s = 0, k = 0$

$y = 0, z' = 0, s = 1, k = 0$

$y = 0, z' = 0, s = 0, k = 1$.

Soit $X_1' = \begin{pmatrix} x = 4 \\ y = 1 \\ z' = 0 \\ s = 0 \\ t = -6 \\ k = 0 \end{pmatrix}$, $X_2' = \begin{pmatrix} x = 2 \\ y = 0 \\ z' = 1 \\ s = 0 \\ t = -3 \\ k = 0 \end{pmatrix}$, $X_3' = \begin{pmatrix} x = 0 \\ y = 0 \\ z' = 0 \\ s = 1 \\ t = 0 \\ k = 0 \end{pmatrix}$, $X_4' = \begin{pmatrix} x = 20 \\ y = 0 \\ z' = 0 \\ s = 0 \\ t = -15 \\ k = 1 \end{pmatrix}$

Soit en coordonnées avec des z (et pas des z') :

$X_1 = \begin{pmatrix} x = 4 \\ y = 1 \\ z = -6 \\ s = 0 \\ t = -6 \\ k = 0 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} x = 2 \\ y = 0 \\ z = -2 \\ s = 0 \\ t = -3 \\ k = 0 \end{pmatrix}$, $X_3 = \begin{pmatrix} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \\ s = 1 \\ t = 0 \\ k = 0 \end{pmatrix}$, $X_4 = \begin{pmatrix} x = 20 \\ y = 0 \\ z = -15 \\ s = 0 \\ t = -15 \\ k = 1 \end{pmatrix}$

Pour avoir une base de F, on projette ces 4 vecteurs sur $\mathbb{Z}^5$ (on enlève la dernière composante)

e) Pour trouver une base de $E \cap F$, on se ramène à un système.

$$E \cap F = \{ \alpha w + \beta u', (\alpha, \beta \in \mathbb{Z}) \text{ vérifiant les équations de } F \}.$$

$$= \Big\{ \underset{\begin{pmatrix} -\alpha \\ \alpha + 6\beta \\ -5\alpha - 18\beta \\ 3\alpha + 9\beta \\ 4\alpha + 15\beta \end{pmatrix}}{\alpha w + \beta u'} , \quad \begin{cases} -\alpha + 2(\alpha + 6\beta) + (-5\alpha - 18\beta) \equiv 0[5] \\ -3\alpha + 2(4\alpha + 15\beta) = 0 \end{cases}$$

Le système est
$$\begin{cases} -4\alpha - 6\beta \equiv 0[6] \\ 5\alpha + 15\beta = 0 \end{cases}$$

$$\underset{\exists k \in \mathbb{Z}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} -4\alpha - 6\beta - 5k = 0 \\ \alpha + 3\beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 3\beta = 0 \\ 6\beta - 5k = 0 \end{cases}$$

on pose $k' = k - \beta$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 3\beta = 0 \\ \beta - 5k' = 0 \end{cases}$$

Une base est donnée en posant $k' = 1$, et alors $\begin{pmatrix} \alpha = -15 \\ \beta = 5 \\ k' = 1 \end{pmatrix}$ puis $\begin{pmatrix} \alpha = -15 \\ \beta = 5 \\ k = 6 \end{pmatrix}$

Une base de $E \cap F$ est donc donnée par $-15w + 5u'$.

<u>Remarque</u> : Une manière plus systématique de résoudre ces questions a été présentée en cours à partir de la forme de Smith et des matrices de passage (cf ex3). Ce que l'on fait ici n'est pas différent : on n'effectue que les calculs nécessaires et pas plus.

Exercice 3 : A.smith_form() renvoie D, P, Q telles que $PAQ = D$ avec D "diagonale".

ie $A = P^{-1} D Q^{-1}$

Q^{-1} est un isomorphisme $\Rightarrow$ surjectif.

Base de Im A : on a $\mathrm{Im}(P^{-1}DQ^{-1}) = \mathrm{Im}(P^{-1}D)$
$= P^{-1}\,\mathrm{Im}(D)$.

Or $\mathrm{Im}\, D = \mathbb{Z}\left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\6\\0\end{pmatrix} \right\rangle$

Donc $\mathrm{Im}\, A = P^{-1}\,\mathrm{Im}\, D = \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-6\\0\\6\end{pmatrix} \right\rangle$. (c'est une base !)

P^{-1} iso $\Rightarrow$ injectif

Base de ker A : $\ker A = \ker(P^{-1}DQ^{-1}) = \ker(DQ^{-1})$
$= Q \ker D$

Or $\ker D = \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}}_{=e_3}, e_4, e_5, e_6 \right\rangle$ et donc $\ker A = \langle C_3, C_4, C_5, C_6 \rangle$

colonnes de Q.

(c'est une base !).

Equations pour Im A : on a

$X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathrm{Im}\, D \iff \begin{cases} y \equiv 0\ [6] \\ z = 0 \end{cases}$

Comme $\mathrm{Im}\, A = P^{-1}\,\mathrm{Im}\, D$, $X \in \mathrm{Im}\, A$ ssi $PX \in \mathrm{Im}\, D$

ie ssi $\begin{cases} -y + z \equiv 0\ [6] \\ -x + 2y - z = 0 \end{cases}$ (les coeff sont ceux des lignes 2 et 3 de P)

Equations de ker A :

$X = \begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_6\end{pmatrix} \in \ker D \iff \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$

Puis $X \in \ker A = Q \ker D$ ssi $Q^{-1}X \in \ker D$ ie ssi $\begin{cases} 6x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 9x_4 + 10x_5 + 11x_6 = 0 \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_6 = 0 \end{cases}$