Relations bien fondées

I. Ordres bien fondés

Exercice 1. Parmi les ensembles ordonnés suivants, lesquels ont un ordre bien fondé ?

a) $\mathbf{N}$, muni de la relation de divisibilité.

b) $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$, où $(n_1, m_1) < (n_2, m_2) \iff (n_1 < n_2)$ et $m_1 < m_2$.

c) $\mathbf{Q}, <$.

d) Les mots, munis de l'ordre alphabétique.

e) L'ensemble $\mathcal{P}(\mathbf{N})$ des sous-ensembles de $\mathbf{N}$, muni de l'inclusion.

Exercice 2. Vrai ou faux ?
"Soit $(E, <)$ un ensemble ordonné. Pour que l'ordre soit bien fondé, il faut que l'ensemble $\{y \in E,\ y < x\}$ soit fini."

II. Fonctions récursives

Exercice 3. Soit k un corps.

a) Quel ordre bien fondé peut-on mettre sur l'ensemble $k[X]$ des polynômes à coefficients dans k pour calculer le pgcd de deux polynômes de façon récursive ?

b) Ecrire un tel programme (on ne demande pas de reprogrammer la division euclidienne).

Exercice 4. On considère le programme suivant définissant la fonction $A : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ (dite fonction de Ackermann) :

```
def A(m,n):
    if(m==0): return (n+1)
    elif (n==0): return A(m-1,0)
    else: return A(m-1,A(m,n-1))
```

Montrer que la fonction A ainsi définie est récursive.

Exercice 5 (Examen 2018)**.** Voici la définition Python d'une fonction $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$.

```
def f(x,y):
    if abs(x)>abs(y):return(f(y,x))
    elif x==0:return(y)
    else:return(f(x,abs(x)-abs(y)))
```

a) Que vaut $f(12, 30)$?

b) Pour quelle relation bien fondée la définition de f est elle récursive ? Justifier le caractère "bien fondé" de cette relation.

c) Montrer par récurrence sur la relation qu'on a pour tous x, y, $f(x, y)$ divise x et y.

d) Montrer par récurrence sur la relation qu'on a pour tout x, y, pgcd(x, y) divise $f(x, y)$.

e) A quelle condition sur (x, y) a t-on $f(x, y) \geqslant 0$?

Exercice 6. On considère une famille $(u_{n,k})_{(n,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ vérifiant les relations :

$$\sum_{k=0}^{n} u_{n,k} = n! \qquad \text{et} \qquad \forall k > 0,\ u_{n,k} = \binom{n}{k} u_{n-k,0}.$$

La famille $(u_{n,k})$ est elle ainsi définie récursivement ?
Ecrivez un script calculant $u_{10,3}$.