Algèbre linéaire effective

I. Pivot de Gauss

Exercice 1. — Soit $A \in M_{n,m}(k)$ une matrice.

a) Écrire un algorithme calculant le rang de A.

b) Écrire un algorithme renvoyant des matrices P, Q telles que $PAQ = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

II. Applications

Exercice 2. — Soit k un corps. Décrire des algorithmes pour :

a) Etant donnée une famille de vecteurs $x_1, \dots, x_p \in k^n$, en extraire une base de $\operatorname{Vect}\{x_1, \dots, x_p\}$.

b) Compléter une famille libre de vecteurs de k^n en une base.

c) Etant donnée une famille de vecteurs $x_1, \dots, x_p \in k^n$, donner un système d'équations dont $\operatorname{Vect}\{x_1, \dots, x_p\}$ est solution.

d) Dualement, étant donné un système d'équations, trouver une base de l'espace vectoriel solution.

Exercice 3. — Soit k un corps.

a) Montrer que le groupe linéaire $\mathrm{GL}_n(k)$ est engendré par les matrices de transvection et de dilatation.

b) Donner un algorithme prenant en entrée une matrice carrée inversible (à coefficients dans $\mathbf{Q}$) et renvoyant une liste de matrices élémentaires dont elle est le produit.

Exercice 4. — Soit $A \in \mathrm{M}_n(k)$ une matrice fixée. Soit $K_A := \{B \in \mathrm{M}_n(k),\ ABA = 0\}$.

a) Quelle est la dimension de K ?

b) Ecrire un script qui détermine une base de K_A