

Algèbre linéaire sur \mathbf{Z}

Exercice 1 (Un exercice promis est dû). — Soient $u = (4, 2, 2, -3, -1)$, $v = (5, 7, -11, 3, 10)$, $w = (-1, 1, -5, 3, 4)$ des vecteurs de \mathbf{Z}^5 . On note E le sous \mathbf{Z} -module de \mathbf{Z}^5 engendré par u, v et w .

- a) Donner une base de E .
- b) Le vecteur $(1, 1, -1, 0, 1)$ est-il combinaison linéaire à coefficients rationnels de u, v, w ?
Est-il combinaison linéaire à coefficients entiers de u, v, w ?
- c) Donner un système d'équations linéaires de E (éventuellement modulaires).
- d) Soit F le sous \mathbf{Z} -module de \mathbf{Z}^5 donné par les équations

$$\begin{cases} x + 2y + z & \equiv 0 \pmod{5} \\ 3x + 2t & = 0 \end{cases}$$

Donner une base de F .

- e) Donner une base de $E \cap F$.

Exercice 2. — Soit A la matrice suivante :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 8 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

- a) Déterminer la forme de Smith de A , ainsi que les matrices de passage P, Q en précisant la relation entre P, Q et A .
- b) Donner une base de $\text{Im } A$ et de $\ker A$.
- c) Donner un système d'équations (éventuellement modulaires) pour $\text{Im } A$.

Exercice 3. — Soit A la matrice suivante :

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 \end{bmatrix}$$

La fonction

`smith_form(A)`

renvoie :

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} -1 & 7 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & -6 & -5 & -4 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et donne :

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Que peut-on lire sans calculs sur $\text{Im } A$ et $\ker A$?