

L3 Algèbre effective - exercices type avec Sagemath

F-X. Dehon - version du 9 décembre 2019

Ex.1 L'application $\mathbb{Z}^4 \rightarrow \mathbb{Z}^2$, $(x, y, z, t) \mapsto (x - y + z, x + y + 3z + 2t)$ est elle surjective ? A défaut exhiber une base adaptée et une équation de l'image.

Ex.2 A quelle condition sur $a, b \in \mathbb{Z}$ le système d'équations modulaires

$$\begin{cases} x + y = a \pmod{6} \\ x - y = b \pmod{2} \end{cases}$$

admet il une solution ? Quelles sont alors toute les solutions ?

Rq : On peut déclarer dans Sagemath la matrice $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ par

```
a,b=ZZ['a,b'].gens()  
B=matrix([a,b]).transpose()
```

Ex.3 On considère les trois vecteurs de \mathbb{Z}^4 : $f_1 = (1, 1, 2, 1)$, $f_2 = (-1, 1, 2, 1)$, $f_3 = (1, 1, 3, 3)$. Peut on compléter le triplet (f_1, f_2, f_3) en une base de \mathbb{Z}^4 ? A défaut exhiber une sous famille de taille maximale qu'on peut compléter en une base et déterminer une telle complétion.