L3 Algèbre effective - algèbre linéaire et matricielle - TP

F-X. Dehon - version du 9 décembre 2019

Ex.0.1 Déteminer une base de $\mathrm{Ker}(A) \subset \mathbb{Z}^4$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -5 \end{pmatrix}$.

Ex.0.2 Déterminer une base adaptée de $\mathrm{Im}(A) \subset \mathbb{Z}^2$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Ex.0.3 Déterminer une équation (éventuellement modulaire) de $\mathrm{Im}(A) \subset \mathbb{Z}^2$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Ex.1 Déterminer avec les méthodes de niveau 1 et 2 une base des solutions entières de l'équation homogène et une solution particulière si elle existe du système d'équations modulaires

$$\begin{cases} x + 2y - z = 2 \bmod 6 \\ 2x - y + 2z = 3 \bmod 9 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$$

Si on remplace les valeurs du second membre $2, 3, 3$ par des paramètres $a, b, c \in \mathbb{Z}$, à quelle condition sur ces paramètres le système admet il une solution ?

Méthode : Observer que les solutions cherchées sont les projections sur les 3 premières coordonnées des solutions entières du système

$$\begin{cases} x + 2y - z + 6k = 2 \\ 2x - y + 2z + 9l = 3 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$$

Ex.2 Soient A et B les matrices définies par

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & -3 \\ 2 & 4 & 3 \\ 2 & 6 & 7 \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

```
A=matrix(ZZ,[[2,-1,0,1,1,2],[1,0,-1,1,2,1],[2,1,0,2,3,3]]).transpose()
B=matrix(ZZ,[[3, 0, 1, 2, 2, 4],[5, 0, -1, 4, 6, 6],[1, 3, -3, 3, 7, 2]]).transpose()
#latex(A)
```

A t-on $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Im}(B)$ vus comme sous-espaces vectoriels de $\mathbb{Q}^6$? Et comme sous-modules de $\mathbb{Z}^6$? Donner une réponse basées sur les méthodes de niveau 1 et 2. Combien de méthodes pouvez vous concevoir ?

Il y a un test d'égalité natif dans Sagemath (de niveau 3) :

```
print matrix(QQ,A).column_space()==matrix(QQ,B).column_space()
```

Ex.3 Soient A et B les matrices de $\mathrm{M}_{6,4}(\mathbb{Z})$ définies par

```
A=matrix(QQ,[[1,0,1,-1,1,2],[-1,1,0,0,1,0],[3,-2,1,-1,2,2],[0,0,2,2,3,2]]).transpose()
B=matrix(QQ,[[2,-1,0,1,1,2],[1,0,-1,1,2,1],[2,1,0,2,3,3],[3,1,2,4,4,1]]).transpose()
#show('A=',A,'B=',B)
```

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer avec les méthodes de niveau 1 et 2 la dimension, une base et une équation de $\mathrm{Im}(A) \cap \mathrm{Im}(B)$ vu comme sous-$\mathbb{Q}$-espace vectoriel de $\mathbb{Q}^6$. Combien de méthodes pouvez vous concevoir ?

Déterminer ces mêmes objets vus comme sous-$\mathbb{Z}$-modules de $\mathbb{Z}^6$.

Comparer avec la réponse donnée par l'instruction (de niveau 3) :

```
print matrix(ZZ,A).column_space().intersection(matrix(ZZ,B).column_space())
```

ou par

```
V=VectorSpace(QQ,6);VA=V.submodule(A.columns());VB=V.submodule(B.columns())
print VA.intersection(VB)
```

Ex.4 Soit A la matrice de $\mathrm{M}_{6,3}(\mathbb{Q})$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} 2 & t^2+1 & 2t^2 \\ -1 & -t & -1 \\ 0 & t^2-1 & 0 \\ 1 & 1 & -t^2+2 \\ 1 & -t+2 & -2t^2+3 \\ 2 & t+1 & -t^2+3 \end{pmatrix}$$

où $t \in \mathbb{Q}$ est un paramètre.

```
t=QQ['t'].gen();A=matrix(QQ['t'],[[2,-1,0,1,1,2],[1+t^2,-t,t^2-1,1,2-t,1+t],[2*t^2,-1,0,2-t^2,3-2*t^2,3-t^2]]).tr
anspose()
```

Discuter du rang de A suivant la valeur de t.

Ex.5 Calculer, avec les méthodes de niveau 1 et 2, le polynôme minimal et le polynôme caractéristique de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

```
A=matrix(ZZ,3,3,[1,1,-2,1,5,0,-2,0,-4])
```

Comparer avec les méthodes (de niveau 3) `A.charpoly()` , `A.det()`

Que pouvez vous dire des racines du polynôme minimal avec Sagemath ? (Chercher les méthodes disponibles.) La matrice A est elle diagonalisable ?

Mêmes questions avec la matrice de la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur le plan d'équation $x - y - 2z = 0$. (Dans quel anneau vivent les coefficients de cette matrice ?)

Méthode pour le polynôme minimal : chercher une relation à coefficients dans $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Q}$ entre $1, A, A^2$, par exemple en transformant A en un vecteur de $\mathbb{Z}^9$ ou de $\mathbb{Q}^9$ `vector(matrix(QQ,A))`

Méthode pour le polynôme caractéristique : observer que les matrices de passage pour la forme normale de Smith de $AX - I \in \mathrm{M}_3(\mathbb{Q}[X])$ sont de déterminant dans $\mathbb{Q}$; on peut faire $X = 0$ pour calculer ces déterminants. La liste des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes pour obtenir la forme de Smith de $AX - I$ donnerait également ces déterminants.

Comment procèderait on si la matrice A dépendait de paramètres $a, \ldots$? En restreignant les opérations élémentaires à celles ne changeant le déterminant au plus que du signe.

Ex.6★ Soient U le groupe des éléments inversibles pour la multiplication de $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ et K le noyau de l'application

$$\varphi : \mathbb{Z}^U \to U,\ (x_g)_{g\in U} \mapsto \sum_{g\in U} x_g * g$$

en notation additive, autrement dit

$$K = \{(x_g)_{g\in U} \in \mathbb{Z}^U,\ \prod_{g\in U} g^{x_g} = 1 \text{ dans } \mathbb{Z}/15\mathbb{Z}\}$$

Construire une famille finie génératrice de K puis une base adaptée de K dans $\mathbb{Z}^U$ à partir de la liste des éléments de U `Zmod(15).list_of_elements_of_multiplicative_group()` et des opérations et test d'égalité dans $\mathbb{Z}/15$ `Zmod(15)(5)^3` .
En déduire une description du groupe U comme produit de groupes cycliques.

Comparer avec le résultat de l'instruction (de niveau 3) `U=Zmod(15).unit_group();print U` .