L3 Algèbre effective - algèbre linéaire et matricielle

Résumé de cours et TP

F-X. Dehon - version du 5 décembre 2019

Représentation des vecteurs et des applications linéaires

Soit E un espace vectoriel (ou "module") sur un anneau commutatif de coefficients $\Bbbk$ ($\Bbbk = \mathbb{Q}, \mathbb{F}_p, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}[X], \mathbb{F}_p[X], \ldots$). Une famille génératrice $(e_i)_{i\in I}$ de E permet de représenter les éléments de E par les familles à support fini d'éléments de $\Bbbk$:

$$E = \Big\{ \sum_{i\in J} x_i e_i,\ J \subset I \text{ fini},\ (x_i)_{i\in J} \in \Bbbk^J \Big\}$$

Cette représentation (ou paramétrage) est bijective si et seulement si la famille (e_i) est de plus libre, c'est à dire forme une base de E. Dans l'exposé on note alors $[u]_{(e_i)}$, ou plus simplement $[u]$ si (e_i) est connue du contexte, la matrice colonne (nulle sauf en un nombre fini d'indices) des coordonnées $(x_i) \in \Bbbk^{(I)}$ de $u \in E$.

Soit $\varphi : E \to F$ une application linéaire entre espaces vectoriels sur $\Bbbk$, $(e_k)_{k\in K}$ une famille génératrice de E et $(f_l)_{l\in L}$ une famille génératrice de F. La donnée pour chaque k d'un choix de coordonnées de $\varphi(e_k)$ relativement à (f_l) définit une matrice $(a_{l,k})$ à coefficients dans $\Bbbk$ représentant φ. (Ici l désigne l'indice de ligne et k l'indice de colonne.)

Si (e_k) et (f_l) sont des bases alors cette représentation établie une bijection linéaire entre l'espace des applications linéaires $E \to F$ et l'espace des matrices $\mathrm{M}_{L,K}(\Bbbk) := \Bbbk^{(L)\times K}$ (chaque colonne est nulle sauf en un nombre fini d'indices) et on a :

$$(a_{l,k})_l = [\varphi(e_k)]_{(f_l)}\ ,$$
$$[\varphi(u)]_{(f_l)} = (a_{l,k}) * [u]_{(e_k)}$$

La composée de deux applications linéaires est représentée par le produit de leurs matrices.

Exercices :

- Soit H le plan de $\Bbbk^3$ d'équation $x + 2y + 1 = 0$ et notons $\mathcal{L}(H)$ l'espace des applications linéaires de H dans H. Représenter les éléments de $\mathcal{L}(H)$ et l'application trace $\mathcal{L}(H) \to \Bbbk$, $u \mapsto \mathtt{tr}(u)$.
- Peux t-on représenter les éléments de l'espace des applications continues de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Q}$?

Un grand nombre de problèmes pour ne pas dire tous se ramènent à résoudre :

L'équation fondamentale $AX = Y$ où $A \in \mathrm{M}_{p,q}(k)$, $X \in \mathrm{M}_q(\Bbbk)$, $Y \in \mathrm{M}_p(\Bbbk)$. (On se limite aux matrices de taille finie $p \times q$.)

On veut déterminer

- la dimension et une base de l'espace des X tels que $AX = 0$ (cet espace est le noyau de A noté $\mathrm{Ker}(A)$),
- la dimension et une base de l'espace des Y tels qu'il existe X vérifiant $AX = Y$ (cet espace est l'image de A noté $\mathrm{Im}(A)$),
- une équation linéaire de $\mathrm{Im}(A)$, c'est à dire une matrice $N \in \mathrm{M}_{r,p}(k)$ telle que $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Ker}(N)$,
- une solution particulière X_0 de l'équation $AX = Y$ lorsque l'équation admet une solution, donc lorsque $NY = 0$. L'ensemble des solutions est alors l'espace affine $X_0 + \mathrm{Ker}(A)$.

On sait résoudre l'équation $AX = Y$ et donc répondre à ces questions lorsque A est nulle hors de la diagonale : l'équation devient un système non couplé de p équations $d_i x_i = y_i$ dans $\Bbbk$.

Pour A quelconque, l'algorithme du pivot de Gauss, lorsqu'il s'applique ($\Bbbk$ est un corps ou un anneau euclidien) permet de construire des matrices inversibles $P \in \mathrm{M}_p(\Bbbk)$ et $Q \in \mathrm{M}_q(\Bbbk)$ telles que PAQ soit nulle hors de la diagonale. (P, respectivement Q, est obtenue en faisant agir la suite d'opérations sur les lignes, respectivement sur les colonnes, sur la matrice unité I_p, respectivement I_q).

Méthodes disponibles dans Sagemath classées par "niveau", cf [cette fiche (https://wiki.sagemath.org/quickref?action=AttachFile&do=view&target=quickref-linalg.pdf)](https://wiki.sagemath.org/quickref?action=AttachFile&do=view&target=quickref-linalg.pdf) sur le site wiki.sagemath.org et les tutoriels "algèbre linéaire avec Sagemath". Un exercice de TP indique le niveau des méthodes autorisées.

- (n1) Construction de matrices `t=QQ['t'].gen();A=matrix(QQ['t'],3,2,[t,1,t^3,1,t^2,1])` , `A.augment(B)` , `A.stack(B)` , `block_matrix([[A,0],[0,identity_matrix(2)]])`
- (n1) transposition `A.transpose()`
- (n1) convertion matrice - vecteur, opérations sur les vecteurs `vector(A)` , `A.row(i)` , `A.rows()` , `A.column(j)` , `A.columns()` , `v=vector(l);A*v;v*A`
- (n1) opérations sur les lignes et les colonnes ; forme de Smith à la main `A.add_multiple_of_row(i,j,a)` (change A), `A.with_added_multiple_of_row(i,j,a)` (rend la matrice transformée sans changer A), `A.add_multiple_of_column(i,j,a)`
- (n2) échelonnage suivant les lignes ou les colonnes ou les deux `A.echelon_form()` (échelonnage suivant les lignes, ne rend pas la matrice de passage), `A.smith_form()` (échelonage suivant les lignes et colonnes avec matrices de passages)
- (n3) Ker(A) donné comme Im(M) `M=A.right_kernel().basis_matrix().transpose()`
- (n3) Im(A) donné comme Ker(N) `N=A.left_kernel().basis_matrix()`
- (n3) matrice des coordonnées d'une base de Im(A) `A.column_space().basis_matrix().transpose()` . C'est aussi les colonnes non nulles de A.transpose().echelon_form().transpose()
- (n3) solution particulière de $AX = Y$ `A\Y` ou `A.solve_right(vector([1,2]))` , `A.solve_left(vector([1,1]))`

Exemple :

In [1]:
```
t=QQ['t'].gen();A=matrix(QQ['t'],3,2,[t,1,t^3,1,t^2,1])
show(A,A.smith_form()[0])
print A.solve_left(vector([1,1]))
```

Out[1]:

$$\begin{pmatrix} t & 1 \\ t^3 & 1 \\ t^2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t^2 - t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```
((t^2 + t + 1)/(t^2 + t), -1/(t^2 + t), 0)
```

Questions type :

- $k = \mathbb{Q}$ ou $\mathbb{Z}$, $A \in \mathrm{M}_{n,s}(k)$, $B \in \mathrm{M}_{n,t}(k)$. Déterminer la dimension, une base, une équation de $\mathrm{Im}(A) \cap \mathrm{Im}(B) \subset \mathbb{Z}^n$. Ecrire un test de l'égalité $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Im}(B)$.
- Déterminer une présentation adaptée de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$

TP

Ex.1 Déterminer avec les méthodes de niveau 1 et 2 une base des solutions entières de l'équation homogène et une solution particulière si elle existe du système d'équations modulaires

$$\begin{cases} x + 2y - z = 2 \bmod 6 \\ 2x - y + 2z = 3 \bmod 9 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$$

Si on remplace les valeurs du second membre $2, 3, 3$ par des paramètres $a, b, c \in \mathbb{Z}$, à quelle condition sur ces paramètres le système admet il une solution ?

Méthode : Observer que les solutions cherchées sont les projections sur les 3 premières coordonnées des solutions entières du système

$$\begin{cases} x + 2y - z + 6k = 2 \\ 2x - y + 2z + 9l = 3 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$$

Ex.2 Soient A et B les matrices définies par

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & -3 \\ 2 & 4 & 3 \\ 2 & 6 & 7 \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

```
A=matrix(ZZ,[[2,-1,0,1,1,2],[1,0,-1,1,2,1],[2,1,0,2,3,3]]).transpose()
B=matrix(ZZ,[[3, 0, 1, 2, 2, 4],[5, 0, -1, 4, 6, 6],[1, 3, -3, 3, 7, 2]]).transpose()
#latex(A)
```

A t-on $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Im}(B)$ vus comme sous-espaces vectoriels de $\mathbb{Q}^6$? Et comme sous-modules de $\mathbb{Z}^6$? Donner une réponse basées sur les méthodes de niveau 1 et 2. Combien de méthodes pouvez vous concevoir ?

Il y a un test d'égalité natif dans Sagemath (de niveau 3) :

```
print matrix(QQ,A).column_space()==matrix(QQ,B).column_space()
```

Ex.3 Soient A et B les matrices de $\mathrm{M}_{6,4}(\mathbb{Z})$ définies par

```
A=matrix(QQ,[[1,0,1,-1,1,2],[-1,1,0,0,1,0],[3,-2,1,-1,2,2],[0,0,2,2,3,2]]).transpose()
B=matrix(QQ,[[2,-1,0,1,1,2],[1,0,-1,1,2,1],[2,1,0,2,3,3],[3,1,2,4,4,1]]).transpose()
#show('A=',A,'B=',B)
```

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer avec les méthodes de niveau 1 et 2 la dimension, une base et une équation de $\mathrm{Im}(A) \cap \mathrm{Im}(B)$ vu comme sous-$\mathbb{Q}$-espace vectoriel de $\mathbb{Q}^6$. Combien de méthodes pouvez vous concevoir ?

Déterminer ces mêmes objets vus comme sous-$\mathbb{Z}$-modules de $\mathbb{Z}^6$.

Comparer avec la réponse donnée par l'instruction (de niveau 3) :

```
print matrix(ZZ,A).column_space().intersection(matrix(ZZ,B).column_space())
```

ou par

```
V=VectorSpace(QQ,6);VA=V.submodule(A.columns());VB=V.submodule(B.columns())
print VA.intersection(VB)
```

Ex.4 Soit A la matrice de $\mathrm{M}_{6,3}(\mathbb{Q})$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} 2 & t^2+1 & 2t^2 \\ -1 & -t & -1 \\ 0 & t^2-1 & 0 \\ 1 & 1 & -t^2+2 \\ 1 & -t+2 & -2t^2+3 \\ 2 & t+1 & -t^2+3 \end{pmatrix}$$

où $t \in \mathbb{Q}$ est un paramètre.

```
t=QQ['t'].gen();A=matrix(QQ['t'],[[2,-1,0,1,1,2],[1+t^2,-t,t^2-1,1,2-t,1+t],[2*t^2,-1,0,2
-t^2,3-2*t^2,3-t^2]]).transpose()
```

Discuter du rang de A suivant la valeur de t.

Ex.5 Calculer, avec les méthodes de niveau 1 et 2, le polynôme minimal et le polynôme caractéristique de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

```
A=matrix(ZZ,3,3,[1,1,-2,1,5,0,-2,0,-4])
```

Comparer avec les méthodes (de niveau 3) `A.charpoly()` , `A.det()`

Que pouvez vous dire des racines du polynôme minimal avec Sagemath ? (Chercher les méthodes disponibles.) La matrice A est elle diagonalisable ?

Mêmes questions avec la matrice de la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur le plan d'équation $x - y - 2z = 0$. (Dans quel anneau vivent les coefficients de cette matrice ?)

Méthode pour le polynôme minimal : chercher une relation à coefficients dans $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Q}$ entre 1, A, A^2, par exemple en transformant A en un vecteur de $\mathbb{Z}^9$ ou de $\mathbb{Q}^9$ `vector(matrix(QQ,A))`

Méthode pour le polynôme caractéristique : observer que les matrices de passage pour la forme normale de Smith de $AX - I \in \mathrm{M}_3(\mathbb{Q}[X])$ sont de déterminant dans $\mathbb{Q}$; on peut faire $X = 0$ pour calculer ces déterminants. La liste des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes pour obtenir la forme de Smith de $AX - I$ donnerait également ces déterminants.

Comment procèderait on si la matrice A dépendait de paramètres $a, \ldots$? En restreignant les opérations élémentaires à celles ne changeant le déterminant au plus que du signe.

Ex.6★ Soient U le groupe des éléments inversibles pour la multiplication de $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ et K le noyau de l'application

$$\varphi : \mathbb{Z}^U \to U,\ (x_g)_{g\in U} \mapsto \sum_{g\in U} x_g * g$$

en notation additive, autrement dit

$$K = \{(x_g)_{g\in U} \in \mathbb{Z}^U,\ \prod_{g\in U} g^{x_g} = 1 \text{ dans } \mathbb{Z}/15\mathbb{Z}\}$$

Construire une famille finie génératrice de K puis une base adaptée de K dans $\mathbb{Z}^U$ à partir de la liste des éléments de U `Zmod(15).list_of_elements_of_multiplicative_group()` et des opérations et test d'égalité dans $\mathbb{Z}/15$ `Zmod(15)(5)^3` .
En déduire une description du groupe U comme produit de groupes cycliques.

Comparer avec le résultat de l'instruction (de niveau 3) `U=Zmod(15).unit_group();print U` .