Ex.2 Equations linéaires sur $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Z}$

Les commandes Sagemath trop évoluées telles que `A.right_kernel().basis()` *ne sont pas considérées comme des réponses possibles aux questions de cet exercice mais vous pouvez toujours tester avec ces commandes la pertinence de vos réponses.*
Vous pouvez utiliser dans vos réponses la commande donnant la forme normale de Smith d'une matrice.

a. Soit $A \in \mathrm{M}_{6,4}(\mathbb{Z})$ la matrice définie par

```
A=matrix(ZZ,6,4,[3, 4, 30, 8, -20, -32, -198, -64, -20, -34, -198, -68, -8, -14, -78, -28, -7, -12, -6
6, -24, 2, 4, 18, 8])
```

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 30 & 8 \\ -20 & -32 & -198 & -64 \\ -20 & -34 & -198 & -68 \\ -8 & -14 & -78 & -28 \\ -7 & -12 & -66 & -24 \\ 2 & 4 & 18 & 8 \end{pmatrix}$$

Calculer la forme normale de Smith de A
Comment peut on retrouver A à partir de sa forme normale et des matrices de passage ? Vérifier votre réponse.

In [1]:
```
A=matrix(ZZ,6,4,[3, 4, 30, 8, -20, -32, -198, -64, -20, -34, -198, -68, -8, -14, -78, -28, -7,
-12, -66, -24, 2, 4, 18, 8]);show(A)
show(A.smith_form())
```

Out[1]:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 30 & 8 \\ -20 & -32 & -198 & -64 \\ -20 & -34 & -198 & -68 \\ -8 & -14 & -78 & -28 \\ -7 & -12 & -66 & -24 \\ 2 & 4 & 18 & 8 \end{pmatrix}$$

Out[1]:

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 11 & 6 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & -3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -34 & -19 & 13 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ -11 & -6 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 11 & 6 & 24 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & -2 \\ -1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

In [15]:
```
D,P,Q=A.smith_form()
print 'A==P^(-1)*D*Q^(-1) ?',A==P^(-1)*D*Q^(-1)
```

```
A==P^(-1)*D*Q^(-1) ? True
```

b. Déterminer une base du noyau de A comme $\mathbb{Z}$-module.

$$\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Ker}(P^{-1}DQ^{-1}) = \mathrm{Ker}(DQ^{-1}) = Q\mathrm{Ker}(D) = Q\mathrm{Vect}((0,0,0,1)) = \mathrm{Vect}(Q(0,0,0,1))$$

In [17]:
```
print 'base formée de :',Q*vector([0,0,0,1])
```

```
base formée de : (0, -2, 0, 1)
```

In [21]:
```
print 'vérification :'
print 'A*(0,-2,0,1) = ?',A*vector([0,-2,0,1])
print 'dim(Ker)=4-rang(A)= ?',4-A.rank()
```

```
vérification :
A*(0,-2,0,1) = ? (0, 0, 0, 0, 0, 0)
dim(Ker)=4-rang(A)= ? 1
```

c. Quelle équation linéaire le vecteur colonne Y (à coefficients dans $\mathbb{Q}$) doit il vérifier pour que l'équation $AX = Y$ d'inconnue X admette une solution sur $\mathbb{Q}$ (c'est à dire à coefficients dans $\mathbb{Q}$)?

Donner le résultat sous la forme $NY = 0$ où N est une matrice adéquate ou par un système d'équations linéaires d'inconnues les coefficients $y_1, y_2, \ldots$ de Y.
Rq. On peut créer un vecteur colonne Y dont les coefficients sont des variables symboliques y_i par les instructions :

```
y = list(var('y%d' % i) for i in range(n)) #n = taille de Y
Y=matrix(y).transpose()
```

In [85]:
```
n=6
y = list(var('y%d' % i) for i in range(n)) #n = taille de Y
Y=matrix(y).transpose()
show(Y)
```

Out[85]:

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix}$$

$Y \in \mathrm{Im}(P^{-1}DQ^{-1})$ équivaut à $PY \in \mathrm{Im}(D)$. Vu la forme de D, il faut et il suffit que les trois dernières lignes de PY soient nulles.

In [25]:
```
print P*Y
```

```
[      11*y0 + 6*y1 - 4*y2]
[      -6*y0 - 3*y1 + 2*y2]
[   -34*y0 - 19*y1 + 13*y2]
[  6*y0 + 3*y1 - 2*y2 + y5]
[-11*y0 - 6*y1 + 4*y2 + y4]
[   -4*y0 - 2*y1 + y2 + y3]
```

In [32]:
```
N=matrix(3,3,0).augment(identity_matrix(3))*P
show('N =',N,'  NY =',N*Y)
```

Out[32]:

$$\mathtt{N\ =}\ \begin{pmatrix} 6 & 3 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ -11 & -6 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathtt{NY\ =}\ \begin{pmatrix} 6\,y_0 + 3\,y_1 - 2\,y_2 + y_5 \\ -11\,y_0 - 6\,y_1 + 4\,y_2 + y_4 \\ -4\,y_0 - 2\,y_1 + y_2 + y_3 \end{pmatrix}$$

In [35]:
```
print 'vérification :'
print 'N*A =',N*A
print 'dim(Ker(N))=6-rang(N) =? rang(A) :',6-N.rank()==rank(A)
```

```
vérification :
N*A = [0 0 0 0]
[0 0 0 0]
[0 0 0 0]
dim(Ker(N))=6-rang(N) =? rang(A) : True
```

d. On suppose maintenant Y à coefficients dans $\mathbb{Z}$. A quelles conditions sur les coefficients de Y l'équation $AX = Y$ d'inconnue X admet elle une solution sur $\mathbb{Z}$?

Toujours au vu de la forme de D, il faut de plus que les trois premières lignes de PY soient multiples de $1, 2, 6$ respectivement. La condition sur la première ligne est toujour vérifiée. On obtient le système :

In [88]:
```
for i in range(1,3):
    print (P*Y)[i,0],'= 0 mod',D[i,i]
for i in range(3,6):
    print (P*Y)[i,0],'= 0'
```

```
-6*y0 - 3*y1 + 2*y2 = 0 mod 2
-34*y0 - 19*y1 + 13*y2 = 0 mod 6
6*y0 + 3*y1 - 2*y2 + y5 = 0
-11*y0 - 6*y1 + 4*y2 + y4 = 0
-4*y0 - 2*y1 + y2 + y3 = 0
```

e. Donner un exemple de vecteur colonne Y à coefficients entiers qui soit dans l'image de A comme $\mathbb{Q}$-espace vectoriel mais pas dans l'image de A comme $\mathbb{Z}$-module.

On choisit d'abord un tel vecteur pour D à la place de A, par exemple $Y' = (0, 1, 0, 0, 0, 0)$ alors $Y = P^{-1}Y'$ répond à la question.

In [90]:
```
Y=P^(-1)*vector([0,1,0,0,0,0]);print Y
```

```
(-2, 7, 5, 1, 0, 1)
```

In [93]:
```
print 'Vérification :'
print 'N*Y == 0 ?',N*Y == 0
print (P*vector(y))[1],'= 0 mod 2 ?',(P*Y)[1]%2==0
```

```
Vérification :
N*Y == 0 ? True
-6*y0 - 3*y1 + 2*y2 = 0 mod 2 ? False
```