

Nom :

Prénom :

L3 Algèbre effective

Interrogation

15 octobre 2019

Durée prévue : 40mn. Documents et appareils électroniques interdits

Chaque réponse doit être raisonnablement justifiée

On note $x [n]$ la classe d'un entier x modulo un entier n .

Ex. 1. On pose $n = 315$. Montrer qu'on a $\varphi(n) = 144$ (l'indicatrice d'Euler).

Que vaut $4^{144} [315]$? Que vaut $4^{145} [315]$? (Justifiez !)

Montrer en utilisant le lemme chinois qu'on a $5^{145} = 5 [315]$. Que vaut $5^{144} [315]$?

2. On veut calculer l'inverse pour la multiplication de 5 dans $\mathbb{Z}/144\mathbb{Z}$. On note x cet inverse.

Montrer qu'on a $x = 2 [9]$ et $x = -3 [16]$. En déduire x .

Autre méthode : Déterminer une relation de Bezout entre 5 et 144 et en déduire x . Quelle est la méthode la plus efficace ?

3. y est un entier dont on sait $y^5 = 79 [315]$.

Montrer que y est inversible dans le groupe multiplicatif $(\mathbb{Z}/315\mathbb{Z})^\times$ si et seulement si y^5 l'est.

Montrer qu'on a $79^{29} = (-1)^{29} [5]$, $79^{29} = (2^6)^5 2^{-1} [7]$, $79^{29} = ((-2)^3)^9 (-2)^2 [9]$.

En déduire $79^{29} [315]$.

Que vaut $y [315]$? (Justifiez !)