Agrégation Analyse (F. Rouvière) **24.01.01**

EQUATION ICONALE ET CAUSTIQUES

L'espace $\mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire usuel $x \cdot y$ et de la norme euclidienne $\|x\| = r$. On cherche des solutions de l'*équation des ondes* sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$

$$\Delta_x U - \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0 \tag{1}$$

qui soient à variables séparées : $U(x,t) = u(x)v(t)$, et bornées en $t \in \mathbb{R}$, pour chaque x fixé dans $\mathbb{R}^n$.

1. Montrer que ces solutions sont de la forme $U(x,t) = u(x)e^{ikt}$, où k est une constante réelle et u vérifie l'*équation de Helmholtz*

$$\Delta u + k^2 u = 0\ . \tag{2}$$

2.a. Chercher les solutions de (2) de la forme $u(x) = e^{\omega \cdot x}$, où ω est un vecteur constant (*ondes planes*).

b. Pour $n = 3$, chercher les solutions radiales de (2) (*ondes sphériques*). [On pourra montrer que $ru(r)$ est solution d'une équation différentielle simple.]

3. Désormais on recherche, par une méthode asymptotique applicable pour $k \to \infty$, des solutions de (2) sous la forme $u(x) = a(x)e^{-ik\varphi(x)}$, où l'amplitude a et la phase φ sont des fonctions C^∞ réelles. Déduire de (2) que φ doit être solution de l'*équation iconale*

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right)^2 = 1\ . \tag{3}$$

4. Pour construire une solution de (3), on se donne une hypersurface S de $\mathbb{R}^n$, paramétrée par $y = f(s)$, où $y \in \mathbb{R}^n$, $s \in \mathbb{R}^{n-1}$ et f est une application C^∞ de $\mathbb{R}^{n-1}$ dans $\mathbb{R}^n$, avec $f(0) = 0$ et $Df(0)$ injective. On choisit un vecteur unitaire $N(s)$, normal à S au point de paramètre s et fonction C^∞ de s.

a. Montrer que l'application $F : (s,t) \mapsto x = f(s) + tN(s)$ est un difféomorphisme (local) de $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^n$ au voisinage de l'origine.

b. Interpréter géométriquement les applications $x \mapsto f(s(x))$ et $\varphi : x \mapsto t(x)$ données par F^{-1}.

c. Etablir l'égalité $\operatorname{grad} \varphi(x) = N(s(x))$. En déduire que φ est solution de (3). Que peut-on dire des surfaces de niveau de φ (*surfaces d'ondes*) ?

5. Pour $n = 2$, on prend pour S une courbe du plan euclidien orienté $\mathbb{R}^2$, sans point d'inflexion, paramétrée par une abscisse curviligne s. On note $T(s) = f'(s)$ (vecteur unitaire tangent à S) et $N(s)$ le vecteur unitaire directement perpendiculaire. On rappelle que le *rayon de courbure* $R(s)$ est défini par $T'(s) = (1/R(s))N(s)$; on a alors $N'(s) = -(1/R(s))T(s)$.

a. Calculer le jacobien de l'application F de **4** en un point quelconque (s,t). Reconnaître les points $F(s,t)$ tels que $\det DF(s,t) = 0$ (*caustique*, ou *développée*, de S).

b. Donner une représentation paramétrique de la caustique, à l'aide du paramètre s. Montrer que sa tangente est la normale à S au point correspondant. Quand la caustique admet-elle un point stationnaire ? Que peut-on dire de sa tangente en un tel point ?

c. *Exemple.* Déterminer la caustique d'une parabole.

Références. Pour **1**, **2** et **3** : voir un cours sur l'équation des ondes...
Pour **4** : Arnold, *Equations différentielles ordinaires*, fin du §11 (en exercice), ou F.R., *Petit guide de calcul différentiel*, 2ème édition, exercice 96.
Pour **5** : Lelong-Ferrand et Arnaudiès, tome 3, *Géométrie et cinématique*, §VII.5.