PROPAGATION DES ONDES ET PRINCIPE DE HUYGENS

L'espace $\mathbb{R}^3$ est muni de la norme euclidienne $\| \ \|$. On veut résoudre l'*équation des ondes* sur $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+$

$$\partial_t^2 u - \Delta_x u = 0 \ , \tag{1}$$

avec la condition initiale

$$u(x,0) = f(x) \ , \ \partial_t u(x,0) = g(x) \ . \tag{2}$$

Les fonctions $f \in C^3(\mathbb{R}^3)$ et $g \in C^2(\mathbb{R}^3)$ sont données, et la fonction inconnue $u(x,t)$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+$. On note

$$M\varphi(x,r) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{\|y-x\|=r} \varphi(y)\, d\sigma_{x,r}(y) = \frac{1}{4\pi} \int_{\|\omega\|=1} \varphi(x + r\omega)\, d\sigma(\omega)$$

la *moyenne sphérique* d'une fonction (continue) φ sur la sphère de centre $x \in \mathbb{R}^3$ et de rayon $r > 0$; ici $d\sigma_{x,r}$, resp. $d\sigma$, sont les mesures induites par la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^3$ sur cette sphère, resp. sur la sphère unité. Noter que la seconde expression de $M\varphi$ permet de la considérer comme une fonction paire de r définie sur $\mathbb{R}$ entier.
La notation $Mu(x,r,t)$ désigne la moyenne sphérique de u par rapport à la variable x, à t fixé.

1. Montrer que pour $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^3)$ on a

$$\Delta_x M\varphi(x,r) = \left(\partial_r^2 + \frac{2}{r}\partial_r \right) M\varphi(x,r) \ , \ r > 0 \ .$$

[On pourra utiliser l'expression du laplacien en coordonnées sphériques (d'origine x).]

2.a. En déduire que, pour x fixé, la fonction $v(r,t) = r\, Mu(x,r,t)$ est solution de l'équation des ondes sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$

$$\partial_t^2 v(r,t) - \partial_r^2 v(r,t) = 0$$
$$v(r,0) = r\, Mf(x,r) \ , \ \partial_t v(r,0) = r\, Mg(x,r) \ .$$

b. Résoudre cette équation.

3.a. Montrer que le problème (1)(2) admet la solution unique

$$u(x,t) = tMg(x,t) + \partial_t (tMf(x,t)) \ .$$

b. On suppose les supports de f et g contenus dans la boule $\|x\| \le R$. Comment varie $u(x,t)$ lorsque t augmente?

4.a. On étudie maintenant le problème (1)(2) sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+$. Montrer qu'en posant

$$U(x_1, x_2, x_3, t) = u(x_1, x_2, t) \ , \ F(x_1, x_2, x_3) = f(x_1, x_2) \ , \ G(x_1, x_2, x_3) = g(x_1, x_2)$$

le problème pour u, f, g sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+$ se ramène à un problème pour U, F, G sur $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+$ (c'est la *méthode de descente de Hadamard*). Exprimer, à l'aide de **3a**, la solution u au moyen de f et g.

b. On suppose $f = 0$ pour simplifier, et g à support compact. Montrer que pour $t \to +\infty$

$$u(x_1, x_2, t) \sim \frac{1}{2\pi t} \int_{\mathbb{R}^2} g(x_1, x_2) \, dx_1 dx_2 \ .$$

Comparer avec le résultat de **3b**. Fait-il meilleur vivre dans $\mathbb{R}^3$ ou dans $\mathbb{R}^2$?

Références.

F. John, *Partial differential equations*, fourth edition, Springer-Verlag 1991, p.126-134.

W. Strauss, *Partial differential equations, an introduction*, John Wiley and Sons 1992, p.222-227.