Agrégation Analyse (F. Rouvière) **22.2.05**

DIFFUSION DE LA CHALEUR SUR UNE DROITE

On considère l'équation de la chaleur sur $\mathbb{R}$

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array} \begin{cases} \partial_t u - \partial_x^2 u = 0 \text{ pour } x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(0,x) = \varphi(x) \text{ pour } x \in \mathbb{R}, t = 0. \end{cases}$$

La fonction inconnue est $u(t,x)$; la donnée initiale est φ, fonction *continue et bornée* sur $\mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $t > 0$ on note

$$g_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-x^2/4t} \ .$$

Le but de l'exercice est de montrer que les formules $u(t,x) = (\varphi * g_t)(x)$ pour $t > 0$ (produit de convolution) et $u(0,x) = \varphi(x)$ définissent une solution, et de donner quelques propriétés de cette solution. [Parachutée ici pour aller plus vite, cette expression de u pourrait être facilement motivée par transformation de Fourier du problème sur la variable x ; voir la feuille "*Intégrale de Fourier et équation de la chaleur*".]

1. Vérifier que $\partial g_t / \partial t = \partial^2 g_t / \partial x^2$.
2. Montrer que u est fonction continue de (t,x) sur $[0, \infty[\times \mathbb{R}$.
[On pourra écrire $u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x - y\sqrt{4t}) e^{-y^2} \ dy$ pour $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$, et conclure par convergence dominée.]
3. Montrer que u est indéfiniment différentiable sous le signe somme pour $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$. Conclure.
[On pourra dominer les dérivées de g_t pour $0 < a \leq t \leq b$ et $|x| \leq A$, en observant que $(x-y)^2 \geq (y^2/2) - x^2$.]
4. *Exemple* : expliciter et dessiner $u(t,x)$ lorsque $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi a}} e^{-x^2/a}$, $a > 0$.
5. On suppose de plus que φ est *intégrable sur* $\mathbb{R}$.
a. Montrer que $u(t,x)$ est intégrable en x sur $\mathbb{R}$ pour chaque $t \geq 0$, et que l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} u(t,x) dx$ est constante.
b. Montrer que $u(t,x)$ tend vers 0 uniformément sur $\mathbb{R}$ quand $t \to +\infty$.
c. Si $\int_{\mathbb{R}} \varphi \neq 0$ montrer que, lorsque $t \to +\infty$, on a pour chaque $x \in \mathbb{R}$

$$u(t,x) \sim \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(y) \ dy \ .$$

Complément. Un contre-exemple dû à Tychonov montre que la solution du problème (1)(2) n'est pas nécessairement *unique* : si $f(t) = e^{-1/t^2}$ pour $t > 0$ et $f(t) = 0$ sinon, la fonction

$$u(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(t) \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

est C^∞ sur $\mathbb{R}^2$, vérifie (1) et (2) avec $\varphi = 0$, mais $u(t,0) = f(t) > 0$ pour $t > 0$ (John p.212 ; voir aussi Körner p.342).

Mais il y a unicité pour les solutions *bornées* (John p.217, par une adaptation du principe du maximum ; voir aussi Körner p.344).

Références.

Faraut, *Calcul intégral*, Belin 2000, p.159-163.
John, *Partial differential equations*, Springer 1991, p.206-226.
Körner, *Fourier analysis*, Cambridge 1990, p.277-281,338-346.