Agrégation Analyse (F. Rouvière) **21.03.01**

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

1. Soit f une fonction continue positive sur $[1, \infty[$. On suppose qu'il existe deux constantes positives a et b telles que, pour tout $x \geq 1$,

$$f(x) \leq a \int_1^x \frac{f(t)}{t^2} dt + b \ .$$

Montrer que f est bornée.
[On pourra raisonner sur une inéquation différentielle vérifiée par le second membre.]

2. Soit φ une fonction réelle continue sur $[0, \infty[$, et soit $x(t)$ une solution de l'équation différentielle

$$x'' + (1 + \varphi(t))x = 0 \ .$$

a. En appliquant la méthode de variation des constantes montrer que pour tout $a \geq 0$ il existe des constantes A et B telles que

$$x(t) = A \cos t + B \sin t + \int_a^t x(s)\varphi(s) \sin(s - t)\, ds \ , \ t \geq 0 \ .$$

b. On suppose φ intégrable sur $[0, \infty[$. En raisonnant sur $M(t) = \sup_{a \leq s \leq t} |x(s)|$, montrer que x est bornée sur $[0, \infty[$.
c. On suppose $\varphi(t) = O(t^{-2})$ pour $t \to \infty$. En déduire qu'il existe des constantes α et θ telles que, pour $t \to \infty$,

$$x(t) = \alpha \cos(t - \theta) + O(t^{-1}) \ .$$

[On pourra écrire $\int_a^t = \int_a^\infty - \int_t^\infty$.]

3. On considère l'équation différentielle

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = 0 \ ,$$

à coefficients p et q réels, continus sur un intervalle ouvert I.
a. Montrer que les zéros d'une solution $x(t)$ (réelle et non identiquement nulle) sont simples et isolés.
b. Soient $x_1(t)$ et $x_2(t)$ deux solutions réelles indépendantes de cette équation. Montrer qu'entre deux zéros consécutifs de x_1 il y a un zéro de x_2.

Références. L'exercice **1** est extrait du début du problème d'Analyse 1986.
Pour **2** voir De Bruijn, *Asymptotic methods in analysis*, p.190-195, ou Tissier, *Mathématiques générales*, exercice R.2-8.
Pour **3** voir Pommellet, *Cours d'analyse*, p.331, ou Dieudonné, *Calcul infinitésimal*, p.434.