Agrégation Analyse (F. Rouvière) **20.11.01**

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES :

TECHNIQUES DE RÉSOLUTION

On note y la fonction inconnue de la variable x, et $y' = dy/dx$. On s'efforcera de donner une solution *rigoureuse* des questions posées, de préciser le domaine d'existence des solutions, d'esquisser les courbes intégrales, etc.

1.a. Intégrer l'équation $y' = y(1-y)$.
b. Étudier la stabilité des positions d'équilibre.

2. Équation à variables séparées. Intégrer l'équation

$$y' = \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}} \ .$$

Reconnaître la nature géométrique des courbes intégrales.

3. Équations incomplètes. Une équation différentielle du premier ordre est dite *incomplète* si elle est de la forme $f(x, y') = 0$ ou de la forme $f(y, y') = 0$.
a. Esquisser sommairement une méthode d'intégration de ces équations en résolvant en y' (quand cela est possible).
b. Esquisser sommairement une méthode d'intégration en paramétrant (quand cela est possible) la courbe d'équation $f(X, Y) = 0$ sous la forme $X = \varphi(t)$, $Y = \psi(t)$.
c. Intégrer avec soin, par la méthode **b**, l'équation

$$y'^3 - 3xy' + x^3 = 0 \ .$$

4. Équation de Riccati. Intégrer l'équation différentielle

$$y' + y^2 + xy + 1 = 0$$

à l'aide du changement de fonction inconnue $y = u'/u$.
[On pourra ensuite chercher u sous forme d'une série entière.]

5. Équation homogène. Une équation différentielle du premier ordre est dite *homogène* si elle peut s'écrire sous la forme $f(y/x, y') = 0$.
Intégrer l'équation

$$xy'(2y - x) = y^2 \ .$$

[On pourra faire le changement de fonction inconnue $y = ux$.]

Références.
1 : Hubbard et West, *Équations différentielles et systèmes dynamiques*, p.57
2 : Demailly, -*Analyse numérique et équations différentielles*, p.148, ou Arnaudiès et Fraysse, tome 3 p.454
3 : Lelong-Ferrand et Arnaudiès, tome 4 p.134-137, ou Arnaudiès et Fraysse, tome 3 p.459
4 : Lelong-Ferrand et Arnaudiès, tome 4 p.418 (exercice non corrigé)
5 : Demailly p. 158.