Agrégation Analyse (F. Rouvière) **16.3.98**

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

1. Une équation de Riccati

On considère l'équation

$$x' = x^2 - (2t-1)x + t^2 - t + 1 \ .$$

a. Rechercher les solutions polynomiales. En déduire la solution générale.
[On pourra poser $y = x - t$.]
b. Tracer les courbes intégrales maximales ; rechercher les translations qui permettent de passer des unes aux autres.

2. Une autre

On considère le problème de Cauchy

$$x' = x^2 + t^2 + 1 \ , \ x(0) = 0 \ .$$

a. Soit C le rectangle $0 \leq t \leq T$, $|x| \leq R$. Montrer que c'est un "cylindre de sécurité" pour l'équation si

$$R^2 + T^2 + 1 \leq \frac{R}{T} \ .$$

Pour quelles valeurs de T existe-t-il effectivement de tels rectangles?
b. En déduire que le problème admet sur l'intervalle $[0, 1/3]$ une solution unique.
c. En observant que $x' \geq x^2 + 1$, montrer que la solution obtenue en **b** ne peut pas se prolonger jusqu'à $t = \pi/2$.
d. Préciser l'allure de la courbe intégrale au voisinage de l'origine.

3. Asymptotique d'une solution

Soit $x(t)$ une solution maximale de l'équation différentielle

$$x' = t^3 - x^3 \ ,$$

définie sur l'intervalle $I =]a, b[$.
a. Montrer (par l'absurde) qu'il existe $t_1 \in I$ tel que $x(t_1) < t_1$.
b. Montrer (par l'absurde) que l'on a $x(t) < t$ pour tout $t \in [t_1, b[$.
c. En déduire que $b = +\infty$.
d. Montrer qu'il existe $c > 0$ tel que $x > 0$ et $x' + t^2 x \geq t^3$ pour tout $t \geq c$.
e. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, établir l'équivalent lorsque $t \to +\infty$

$$\int_c^t u^\alpha e^{u^3/3} du \sim t^{\alpha-2} e^{t^3/3} \ .$$

f. En déduire que, pour $t \to +\infty$,

$$x(t) = t + O(t^{-2}) \ .$$

Références

Les exercices 1 et 2 sont extraits de Demailly, *Analyse numérique et équations différentielles*, fin du chapitre 6 (sans corrigés), et l'exercice 3 de Tissier, *Mathématiques générales*, exercices R5-6 et R5-7 (avec corrigés).