SÉRIES ENTIÈRES

1. Rayons de convergence.
a. Trouver celui de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n} z^n$.
b. Montrer que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ a un rayon strictement positif si et seulement s'il existe $A > 0$ tel que $|a_n| \leq A^n$ pour tout $n \geq 1$.

2. Équation différentielle.
a. Déterminer les solutions de l'équation différentielle

$$xy'' + y' + xy = 0$$

qui sont développables en série entière à l'origine.
b. Montrer que, parmi les solutions de **a**, celle qui vérifie $y(0) = 1$ est la *fonction de Bessel*

$$J_0(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(x \sin t)\, dt\ .$$

3. Développement de l'inverse. Soit f une fonction développable en série entière autour de 0, telle que $f(0) = 1$. Montrer que $1/f$ est développable en série entière autour de 0.
[On pourra utiliser **1.b** pour majorer par récurrence les coefficients de la série obtenue pour $1/f$.]

4. Points singuliers.
a. Soit

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{(2^n)}\ .$$

Quel est son rayon de convergence ? Montrer que f n'est pas bornée sur $[0, 1[$. En déduire que 1 est un point singulier de f.
b. En observant que $f(z) = f(z^2) + z$, en déduire que toute racine 2^k-ème de l'unité est point singulier, et enfin que tout point du cercle unité est singulier.
c. Plus généralement, soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, de rayon de convergence 1, à coefficients a_n tous positifs. Montrer que 1 est point singulier de f.
[Indication : sinon la série

$$\sum_0^{\infty} \frac{f^{(p)}(1/2)}{p!} \left(x - \frac{1}{2} \right)^p$$

convergerait pour un $x > 1$; expliciter $f^{(p)}(1/2)$ et aboutir à une contradiction.]

Références.
1.a. Pommellet, *Analyse*, p.217 ; **1.b.** Gourdon, *Analyse*, p.249.
2. Moisan-Vernotte-Tosel, *Suites et séries de fonctions*, p.93.
3. Gourdon p.249 ; Leichtnam, *Exercices d'oral X et E.N.S., analyse*, p. 287.
4.a,b. Rudin, *Analyse réelle et complexe*, §16.4 ; Titchmarsh, *Theory of functions*, p.217 (par une autre méthode).
4.c. Zuily-Queffélec, *Analyse*, p.53 ; Titchmarsh, p.214.