Agrégation (Analyse) **28.3.00**

INTÉGRALE DE FOURIER ET ÉQUATION DE LA CHALEUR

L'intégrale de Fourier étant définie par $\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2i\pi x\xi} dx$, on rappelle que la gaussienne

$$\gamma_a(x) = \frac{1}{a} e^{-\pi x^2/a^2} \text{ donne } \widehat{\gamma_a}(\xi) = e^{-\pi a^2 \xi^2} = \frac{1}{a}\gamma_{1/a}(\xi) \ .$$

On considère l'**équation de la chaleur** sur $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0 \ , \ x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(0,x) &= \varphi(x) \ . \end{aligned} \tag{1}$$

La fonction donnée φ est supposée continue sur $\mathbb{R}$, avec $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ et $\widehat{\varphi} \in L^1(\mathbb{R})$.

1. Calculs formels. Déduire de (1) une équation différentielle (en la variable t) vérifiée par la transformée de Fourier (sur la variable x):

$$\widehat{u}(t,\xi) = \int_{\mathbb{R}} u(t,x) e^{-2i\pi x\xi} dx \ .$$

En résolvant cette équation, établir les deux expressions

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}(\xi) e^{-4\pi^2\xi^2 t} e^{2i\pi\xi x} d\xi \ , \ t \geq 0, x \in \mathbb{R} \ , \tag{2}$$

$$u(t,x) = \left(\varphi * \gamma_{\sqrt{4\pi t}}\right)(x) \ , \ t > 0, x \in \mathbb{R} \ , \tag{3}$$

où $*$ désigne le produit de convolution sur $\mathbb{R}$.

2. Justification des calculs.
a. Montrer avec soin que l'égalité (2) définit bien $u(t,x)$, fonction continue sur $[0,\infty[\times\mathbb{R}$ et C^∞ sur $]0,\infty[\times\mathbb{R}$, solution du problème (1).
b. Déduire de (2), à l'aide du théorème d'inversion de Fourier, l'égalité (3).

3. Propriétés de la solution (2)(3).
a. Montrer que $u(t,x)$ est intégrable en x sur $\mathbb{R}$ pour chaque $t \geq 0$, et que l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} u(t,x)\,dx$ est constante.
b. Montrer que, pour tout x, $u(t,x)$ tend vers 0 quand $t \to +\infty$, et donner un équivalent.
c. Expliciter $u(t,x)$ lorsque $\varphi = \gamma_a$ (où $a > 0$ est donné), et esquisser le graphe de la fonction u des variables (t,x).

Références. Körner, *Fourier analysis*, chapitre 55. Le théorème 55.4 p. 277 établit que (3) est solution de (1) sous la seule hypothèse que φ est continue et bornée (la condition initiale étant alors remplacée par $\lim_{t\to 0} u(t,x) = \varphi(x)$).
Faraut, *Calcul intégral*, Belin 2000, p. 160.