Agrégation Analyse (F. Rouvière) **20.12.00**

EXERCICES SUR L'INTEGRALE DE FOURIER

On note $\widehat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-itx} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}$ la transformée de Fourier de f (lorsque l'intégrale a un sens).

1. Fourier de L^1 vers C_o . On rappelle la formule $\int_{\mathbb{R}} f(x)\widehat{g}(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(t)g(t)\,dt$, pour $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Dans la suite f est une fonction *impaire*, intégrable sur $\mathbb{R}$.
a. On suppose $0 < a < b$. En utilisant la fonction $g(t) = \frac{1}{t}\chi_{[a,b]}(t)$, montrer l'égalité

$$\int_a^b \widehat{f}(t)\frac{dt}{t} = -2i\int_0^\infty f(x)\frac{dx}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{ax}^{bx} \sin t \frac{dt}{t}\right) .$$

b. Montrer qu'il existe une constante M telle que

$$\left|\int_\alpha^\beta \sin t \frac{dt}{t}\right| \leq M \text{ pour tous } \alpha, \beta \geq 0 .$$

c. En déduire par convergence dominée l'égalité

$$\int_0^\infty \widehat{f}(t)\frac{dt}{t} = -i\pi\int_0^\infty f(x)\frac{dx}{\sqrt{2\pi}} ,$$

valable pour $f \in L^1(\mathbb{R})$, *impaire*.
d. On sait que l'application $f \mapsto \widehat{f}$ est injective de $L^1(\mathbb{R})$ dans l'espace $C_o(\mathbb{R})$ des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ qui tendent vers 0 à l'infini. Déduire de **c** qu'elle n'est pas surjective, en considérant la fonction *impaire* sur $\mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(t) = \frac{1}{1 + |\ln t|} \text{ pour } t > 0 .$$

2. Donner un exemple de $f \in L^2(\mathbb{R})$ telle que $f \notin L^1(\mathbb{R})$ mais $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$.

3. Problème de Dirichlet pour un demi-plan. On note P le demi-plan supérieur $y > 0$ de $\mathbb{R}^2$, et f une fonction donnée sur $\mathbb{R}$. On cherche $u \in C^2(P) \cap C(\overline{P})$ telle que

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \text{ dans } P \text{ et } u(x, 0) = f(x) \text{ pour } x \in \mathbb{R} . \tag{1}$$

a. *Solution formelle.* Former une équation différentielle vérifiée par la transformée de Fourier partielle $\widehat{u}(t, y)$ sur la première variable, et en déduire (si $\widehat{u}(t, y)$ est bornée pour $y \to +\infty$) les égalités

$$\widehat{u}(t, y) = \widehat{f}(t)e^{-|t|y} \text{ , puis } u(x, y) = \frac{y}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{f(s)}{(x-s)^2 + y^2}ds .$$

b. On suppose $f \in C_o(\mathbb{R})$. Montrer que cette intégrale définit bien $u \in C^2(P) \cap C(\overline{P})$, solution du problème (1).
[Pour la dérivabilité sur P on pourra observer que $\frac{y}{(x-s)^2+y^2} = -\operatorname{Im}\left(\frac{1}{x+iy-s}\right)$ et donner une inégalité de domination pour $|x| \leq a$ et $0 < \varepsilon \leq y \leq b$ (on a alors $|s - x| \geq |s|/2$ dès que $|s| \geq 2a$). Pour la continuité sur $\overline{P}$ on pourra écrire

$$u(x, y) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} (f(x - s) - f(x))\frac{yds}{s^2 + y^2}$$

et en déduire la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ de $u(x, y)$ vers $f(x)$ quand $y \to 0$.]

Références. 1. Buchwalter, *Le calcul intégral*, Ellipses 1991, p.135.
3. Spiegel, *Analyse de Fourier*, McGraw-Hill, 5.19 et 5.20, ou Körner, *Exercises for Fourier analysis*, Cambridge 1993, p.212.