Agrégation Analyse (F. Rouvière) **27.03.01**

COMPACITÉ ET ESPACES NORMÉS

1. Théorème du point fixe de Kakutani.

a. Soient E un espace normé, u une application linéaire continue de E dans lui-même, et K un compact convexe (non vide) de E tel que $u(K) \subset K$. Montrer que u admet (au moins) un point fixe dans K.

[On pourra considérer la suite des barycentres

$$x_n = f_n(x) = \frac{1}{n}\left(x + u(x) + \cdots + u^{n-1}(x)\right) \ , x \in K \ .]$$

b. Soit $K_n = f_n(K)$. Montrer que l'ensemble des points fixes de u dans K est l'intersection des K_n, $n \geq 1$.

2. Compacts d'un Banach.

a. Montrer qu'une partie A d'un espace de Banach E est compacte si et seulement si elle est fermée bornée et si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un sous-espace F de E, de dimension finie, tel que $d(x, F) \leq \varepsilon$ pour tout $x \in A$.

[On rappelle qu'un espace métrique est compact si et seulement s'il est précompact et complet.]

b. *Exemple.* En déduire qu'une partie A de $\ell^1(\mathbb{N})$ est compacte si et seulement si elle est fermée bornée et équisommable, i.e. pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $x \in A$,

$$\sum_{n \geq N} |x_n| \leq \varepsilon \ .$$

Caractériser de même les compacts de $\ell^2(\mathbb{N})$. Exemples?

3. Enveloppe convexe d'un compact.

Si A est une partie d'un espace normé réel, on note $\Gamma(A)$ son enveloppe convexe et $\overline{\Gamma(A)}$ son enveloppe convexe fermée.

a. Soit A un compact de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $\Gamma(A)$ est l'ensemble des barycentres à coefficients positifs d'au plus $n + 1$ éléments de A ("*théorème de Carathéodory*").

[Si $p > n + 1$, on pourra raisonner sur le noyau de l'application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$

$$(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \longmapsto \left(\sum_{1 \leq i \leq p} \lambda_i x_i, \sum_{1 \leq i \leq p} \lambda_i \right) \ .]$$

En déduire que $\Gamma(A)$ est compacte.

b. Soit A un compact d'un espace de Banach réel E. Montrer que $\overline{\Gamma(A)}$ est compacte.

[On pourra montrer que $\Gamma(A)$ est précompact à l'aide de **2.a**.]

Références.

1. Moisan et Vernotte, *Topologie et séries*, Ellipses, p.15.

2 et **3.** Gonnord et Tosel, *Topologie et analyse fonctionnelle*, Ellipses, p.91-93. Voir aussi Zuily et Queffélec, *Eléments d'analyse pour l'agrégation*, Masson, p.157-159.

3. Tauvel, *Cours de géométrie*, Dunod, p. 77.