Agrégation Analyse (F. Rouvière) **21.10.97**

EXEMPLES DE BASES HILBERTIENNES

1. Polynômes de Laguerre

Soit E l'espace de Hilbert des fonctions de carré intégrable sur $[0,\infty[$ pour la mesure $e^{-x}dx$. Pour $n \in \mathbb{N}$ on note

$$p_n(x) = \frac{1}{n!} e^x \left(\frac{d}{dx}\right)^n \left(e^{-x} x^n\right) .$$

1. Montrer que les p_n sont des polynômes, et qu'ils forment un système orthonormé de E.
[On pourra calculer les produits scalaires (x^m, p_n) en intégrant par parties].
2. Pour $\alpha > 0$ calculer $c_n = (e^{-\alpha x}, p_n)$ et $\sum_0^\infty |c_n|^2$. En déduire que

$$e^{-\alpha x} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \, p_n(x) ,$$

série convergente dans E .
3. Montrer que les e^{-kx} , avec $k \in \mathbb{N}$, sont un système total dans E .
[On pourra effectuer le changement de variable $t = e^{-x}$, et appliquer le théorème de Weierstrass].
4. En déduire que les p_n sont une base hilbertienne de E .

2. Ondelettes de Haar

On note

$$\varphi = \chi_{[0,1/2[} - \chi_{[1/2,1[} \text{ et } \varphi_{n,k}(x) = 2^{n/2} \varphi(2^n x - k) ,$$

où χ désigne la fonction caractéristique et $n, k \in \mathbb{N}$.
1. Montrer que la fonction constante 1 et les $\varphi_{n,k}$, pour $0 \leq k < 2^n$, forment un système orthonormal de l'espace de Hilbert $L^2(0,1)$.
2. Soit $f \in L^2(0,1)$, orthogonale à toutes les fonctions précédentes. Montrer par récurrence sur n que

$$\int_{k/2^n}^{(k+1)/2^n} f(x)dx = 0 \text{ pour } 0 \leq k < 2^n .$$

3. Montrer (par l'inégalité de Cauchy-Schwarz) que $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ est une fonction continue sur $[0,1]$. En déduire que F est identiquement nulle, et finalement que 1 et les $\varphi_{n,k}$ forment une base hilbertienne de $L^2(0,1)$.

Références

Pour Laguerre : *Crouzeix-Mignot*, Exercices p.23 ; *Choquet*, Topologie p.305 (non corrigé) ; voir aussi *Chambert-Loir*, Analyse 3 p.57.
Pour Haar : *Chambert-Loir*, Analyse 3 p.55.