**Agrégation Analyse** (F. Rouvière) **26.1.99**

**THÉORÈME DES NOMBRES PREMIERS**

Le but du problème est de démontrer le *Théorème des Nombres Premiers*

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x} \text{ quand } x \to \infty \ , \tag{TNP}$$

où $\pi(x)$ est le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux au réel $x$.

**Notations.** L'écriture "$f(x) \sim g(x)$ quand $x \to \infty$" signifie qu'il existe une fonction $h$ (définie, comme $f$ et $g$, sur une demi-droite $[a, \infty[$) telle que $f(x) = g(x)(1 + h(x))$ et $\lim_{x\to\infty} h(x) = 0$.
L'écriture "$f(x) = O(g(x))$ quand $x \to \infty$" signifie qu'il existe des constantes positives $A$ et $C$ telles que $|f(x)| \leq C|g(x)|$ pour tout $x \geq A$.
On note $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \ldots, p_n, \ldots$ la suite (infinie) strictement croissante des nombres premiers. *La lettre $p$ désignera toujours un nombre premier* ; ainsi les notations

$$\sum_p f(p) \ , \ \prod_p f(p)$$

désignent $\sum_{n=1}^{\infty} f(p_n)$ et $\prod_{n=1}^{\infty} f(p_n)$ respectivement.
Dans tout le problème on note, pour $x$ réel,

$$\theta(x) = \sum_{p \leq x} \ln p$$

(somme sur tous les nombres premiers inférieurs ou égaux à $x$). Par convention, une somme indexée par un ensemble *vide* d'entiers est nulle.

*Les parties 1 et 2 du problème ne contiennent que de l'analyse réelle à une variable. Les parties 3 et 4 font appel à quelques propriétés des fonctions holomorphes. La partie 3 est indépendante des autres.*

# 1 Préliminaires

**1. a.** Montrer que $\pi(x) \leq x$ pour tout réel $x \geq 0$.
**b.** Montrer que $p_n \geq n$ pour tout entier $n \geq 1$.
**2.** Soit $\varepsilon \in ]0, 1[$. En considérant $\sum_{x^{1-\varepsilon} < p \leq x} \ln p$, établir l'inégalité, pour $x > 1$,

$$(1 - \varepsilon)\pi(x) \ln x + O(x^{1-\varepsilon} \ln x) \leq \theta(x) \leq \pi(x) \ln x \ .$$

**3.** En déduire que l'assertion (TNP) est équivalente à

$$\theta(x) \sim x \text{ quand } x \to \infty \ .$$

**4.** Soient $a > 0$ et $u$ une fonction *croissante* sur l'intervalle $[a, \infty[$.

**a.** Montrer que la convergence de l'intégrale

$$\int_a^\infty \frac{u(x)-x}{x^2}dx$$

entraîne que $u(x) \sim x$ quand $x \to \infty$.
[On pourra raisonner par l'absurde : s'il existe $\lambda > 1$ et une suite $(x_n)$ tendant vers l'infini tels que $u(x_n) \geq \lambda x_n$, on cherchera à minorer l'intégrale

$$\int_{x_n}^{\lambda x_n} \frac{u(x)-x}{x^2}dx\,;$$

et de même si $u(y_n) \leq \mu y_n$ avec $\mu < 1$.]
**b.** La réciproque est-elle vraie ?
**5.** Montrer que (TNP) entraîne l'équivalent $p_n \sim n \ln n$ du $n$-ème nombre premier, lorsque $n \to \infty$.

## 2 Sommation par parties

Soit $(a(n))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite donnée de nombres complexes. Pour $x \in [0, \infty[$ on note

$$A(x) = \sum_{0\leq n\leq x} a(n)\ .$$

Soit $y \in [0, \infty[$, avec $0 \leq y < x$, et soit $f$ une fonction complexe continûment dérivable sur $[y, x]$. Le but de cette partie est d'établir l'égalité

$$\sum_{y<n\leq x} a(n)f(n) = A(x)f(x) - A(y)f(y) - \int_y^x A(t)f'(t)\,dt\ , \tag{1}$$

et d'en donner quelques applications.
**6.** Démontrer (1) lorsque $x$ et $y$ sont entiers.
**7.** En déduire (1) pour tous $x, y$.
[On pourra utiliser les parties entières $x'$ et $y'$ de $x$ et $y$ respectivement].
**8.** On fixe un nombre $a \in ]1, 2[$.
**a.** Pour $x > a$, montrer l'égalité

$$\theta(x) = \pi(x)\ln x - \int_a^x \pi(t)\,\frac{dt}{t}\ . \tag{2}$$

**b.** Pour $x > a$, montrer l'égalité

$$\pi(x) = \frac{\theta(x)}{\ln x} + \int_a^x \theta(t)\,\frac{dt}{t(\ln t)^2}\ . \tag{3}$$

**9. a.** Pour $n$ entier, $n \geq 1$, montrer que le produit

$$\prod_{n+1<p\leq 2n+1} p$$

divise le coefficient binomial $C_{2n+1}^n$, et que $C_{2n+1}^n < 2^{2n}$.
**b.** En déduire l'inégalité

$$\theta(2n+1) = \theta(2n+2) < 2n\ln 2 + \theta(n+1)\ ,$$

et finalement $\theta(n) < 2n \ln 2$ pour tout $n \geq 1$.

**c.** En déduire qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout réel $x \geq 1$,

$$\theta(x) \leq Cx \ .$$

**10.** Pour $s \in \mathbb{C}$, soit

$$\varphi(s) = \sum_p \frac{\ln p}{p^s} \ .$$

Établir, à l'aide de (1) et **9.c**, l'égalité

$$\varphi(s) - \frac{s}{s-1} = s \int_1^\infty \frac{\theta(x) - x}{x^{s+1}} dx \tag{4}$$

pour $\mathrm{Re}\, s > 1$.

## 3 Un théorème taubérien

Soit $f$ une fonction *bornée* sur $[0, \infty[$ et intégrable sur tout compact de $[0, \infty[$. On suppose que la fonction $g$ définie pour $z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\, z > 0$, par

$$g(z) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-tz} dt$$

se prolonge en une fonction holomorphe (notée encore $g$) sur un ouvert $\Omega$ de $\mathbb{C}$ contenant le demi-plan fermé $\mathrm{Re}\, z \geq 0$.

Le but de cette partie est de montrer que cette hypothèse entraîne la convergence de l'intégrale

$$\int_0^\infty f(t)\, dt \ .$$

Pour cela, on introduit deux nombres strictement positifs $\lambda$ et $R$, et les fonctions auxiliaires

$$h(z) = \int_0^\lambda f(t) e^{-tz}\, dt \ ,$$
$$u(z) = e^{\lambda z} h(z) \left( \frac{1}{z} + \frac{z}{R^2} \right) \ ,$$
$$v(z) = e^{\lambda z} g(z) \left( \frac{1}{z} + \frac{z}{R^2} \right) \ .$$

On note $M$ un majorant de $|f(t)|$ pour tout $t \geq 0$.

**11. a.** Établir l'inégalité

$$\left| e^{\lambda z} h(z) \right| \leq \frac{M}{|x|} \text{ pour } x = \mathrm{Re}\, z < 0 \ .$$

**b.** Établir l'inégalité

$$|v(z) - u(z)| \leq 2\frac{M}{R^2} \text{ pour } x = \mathrm{Re}\, z > 0 \text{ et } |z| = R \ .$$

[On pourra chercher d'abord une expression simple de $\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2}$ à l'aide de $x$ et $R$.]

On note $D(R, \varepsilon)$ la partie du plan complexe définie par $|z| \leq R$ et $\mathrm{Re}\, z \geq -\varepsilon$. Soit $C(R, \varepsilon)$ la frontière de $D(R, \varepsilon)$, parcourue une fois dans le sens direct.

**12. a.** Montrer que, pour chaque $R > 0$, il existe $\alpha \in ]0, R[$ tel que $D(R, \varepsilon)$ soit contenu dans $\Omega$ pour $0 < \varepsilon \leq \alpha$. On suppose cela réalisé dans la suite.

**b.** Montrer l'égalité

$$2i\pi\left(g(0)-h(0)\right)=\int_{C(R,\varepsilon)}\left(v(z)-u(z)\right)\,dz\ .$$

On note $C_+$, resp. $C_-$, l'intersection de $C(R,\varepsilon)$ avec le demi-plan $\operatorname{Re} z>0$, resp. $\operatorname{Re} z<0$. On sépare l'intégrale de **12.b** en trois, à savoir

$$I_+=\int_{C_+}\left(v(z)-u(z)\right)dz\ ,\ J_-=\int_{C_-}u(z)\,dz\ ,\ K_-=\int_{C_-}v(z)\,dz\ .$$

**13. a.** Montrer que

$$|I_+|\leq 2\pi\frac{M}{R}\ .$$

**b.** En remplaçant $C_-$ par le demi-cercle $C'_-$ défini par $|z|=R, \operatorname{Re} z<0$, montrer que

$$|J_-|\leq 2\pi\frac{M}{R}\ .$$

**c.** Soit $G(R)$ un majorant de $|g(z)|$ sur $D(R,\alpha)$. En séparant les contributions du segment vertical et des deux arcs de cercle, montrer que

$$|K_-|\leq 2G(R)\left(\pi\frac{\varepsilon^2}{R^2}+\left(\frac{R}{\varepsilon}+1\right)e^{-\lambda\varepsilon}\right)\ .$$

**14.** Déduire des questions **12** et **13** l'existence de

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^\lambda f(t)\,dt\ .$$

# 4 Fonction $\zeta$

Le but de cette partie est d'établir quelques propriétés de la fonction $\zeta$ de Riemann, et de compléter la preuve de (TNP). Pour $s\in\mathbb{C}$ et $\operatorname{Re} s>1$ on note

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\ .$$

**15.** Montrer que $\zeta$ est une fonction holomorphe dans le demi-plan $\operatorname{Re} s>1$.
**16. a.** Pour $\operatorname{Re} s>0$, montrer l'inégalité

$$\left|\int_n^{n+1}\left(n^{-s}-x^{-s}\right)dx\right|\leq |s|\,n^{-\operatorname{Re} s-1}\ .$$

**b.** En déduire qu'il existe une fonction $\psi$, holomorphe dans le demi-plan $\operatorname{Re} s>0$, telle que

$$\zeta(s)=\frac{1}{s-1}+\psi(s)\ \text{pour}\ \operatorname{Re} s>1\ .$$

Cette égalité permet de prolonger $\zeta$ en une fonction holomorphe dans le demi-plan $\operatorname{Re} s>0$ privé du point $s=1$.

Par ailleurs, on rappelle que la fonction $\zeta$ admet le développement en produit infini

$$\zeta(s)=\prod_p\frac{1}{1-p^{-s}}\ ,$$

convergent pour $\operatorname{Re} s > 1$, d'où le développement en série

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\sum_p \frac{\ln p}{p^s - 1} \ ;$$

on ne demande pas de démontrer ces égalités.

**17. a.** Vérifier l'inégalité $3 + 4\cos\alpha + \cos 2\alpha \geq 0$ pour tout réel $\alpha$, et en déduire

$$|1-r|^3 \left|1 - re^{i\alpha}\right|^4 \left|1 - re^{2i\alpha}\right| \leq 1 \ , \text{ pour } 0 \leq r < 1, \alpha \in \mathbb{R} \ .$$

[On pourra développer en série $\operatorname{Re} \ln(1-z)$ pour $|z| < 1$.]

**b.** Montrer que, pour $\sigma > 1$ et $\tau \in \mathbb{R}$, on a

$$\left|\zeta(\sigma)^3 \zeta(\sigma + i\tau)^4 \zeta(\sigma + 2i\tau)\right| \geq 1 \ . \tag{5}$$

**c.** En déduire que la fonction $\zeta(s)$ (prolongée grâce à **16.b**) ne s'annule pas pour $s = 1 + i\tau$, $\tau \neq 0$.

[On pourra faire tendre $\sigma$ vers 1 dans (5).]

**18. a.** Montrer que la fonction

$$\varphi(s) + \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$$

(où $\varphi$ a été definie en **10**) se prolonge en une fonction holomorphe dans le demi-plan $\operatorname{Re} s > 1/2$.

**b.** En déduire que la fonction

$$\varphi(s) - \frac{s}{s-1}$$

se prolonge en une fonction holomorphe dans un ouvert contenant le demi-plan $\operatorname{Re} s \geq 1$.

**19.** Montrer qu'on peut appliquer le théorème taubérien de la partie 3 à la fonction

$$f(t) = e^{-t}\theta(e^t) - 1 \ .$$

En déduire le Théorème des Nombres Premiers.