Agrégation Analyse (F. Rouvière) **26.1.99**

THÉORÈME DES NOMBRES PREMIERS : CORRIGÉ

La première preuve du Théorème des Nombres Premiers a été obtenue en 1896, par Jacques Hadamard et Charles de la Vallée Poussin indépendamment. Elle est longtemps restée, en dépit de diverses améliorations, un tour de force technique, long et délicat. Ce n'est qu'en 1980 qu'une importante simplification du théorème taubérien utile, due à D.J. Newman, a réduit cette preuve à une succession d'exercices élémentaires.

Élémentaires certes, mais souvent astucieux : on appréciera au passage la preuve de l'inégalité $\theta(x) \leq Cx$ (Tchebichev), celle de $\zeta(1+i\tau) \neq 0$ (Mertens), ou encore l'introduction du facteur auxiliaire $\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2}$ (Newman).

Le problème présente la preuve de Newman, d'après les références suivantes :

- D. ZAGIER, Newman's short proof of the prime number theorem, *American Math. Monthly*, October 1997, p.705-708
- J. KOREVAAR, On Newman's quick way to the prime number theorem, *Math. Intelligencer*, 1982, p. 108-115.

Il s'inspire aussi, par endroits, de

- G. HARDY et E. WRIGHT, *An introduction to the theory of numbers*, Oxford University Press 1979
- E. HLAWKA, J. SCHOISSENGEIER et R. TASCHNER, *Geometric and analytic number theory*, Springer-Verlag 1991
- C. ZUILY et H. QUEFFÉLEC, *Éléments d'analyse pour l'agrégation*, Masson 1995.

La rédaction des questions permettait de les résoudre indépendamment les unes des autres, en admettant si nécessaire certaines d'entre elles. Les solutions ne font appel qu'à des techniques très classiques d'analyse réelle ou complexe.

1 Préliminaires

1.a. Pour $x \geq 0$, le nombre d'entiers compris (au sens large) entre 1 et x est la partie entière x' de x. Par suite $\pi(x) \leq x' \leq x$.

1.b. Les nombres premiers inférieurs ou égaux à p_n sont $p_1, \ldots, p_n$, donc

$$n = \pi(p_n) \leq p_n$$

d'après **1.a**.

2. Dans $\theta(x) = \sum_{p \leq x} \ln p$, le nombre de termes est $\pi(x)$ et chacun d'eux est inférieur à $\ln x$, d'où

$$\theta(x) \leq \pi(x) \ln x \ .$$

D'autre part on a évidemment

$$\theta(x) \geq \sum_{x^{1-\varepsilon} < p \leq x} \ln p \ ,$$

somme dont le nombre de termes est $\pi(x) - \pi(x^{1-\varepsilon})$, chacun d'eux étant supérieur à $\ln(x^{1-\varepsilon})$, d'où

$$\begin{aligned}\theta(x) &\geq \big(\pi(x) - \pi(x^{1-\varepsilon})\big) \ln(x^{1-\varepsilon}) \\ &\geq (1-\varepsilon)\pi(x) \ln x + O(x^{1-\varepsilon} \ln x) \ ,\end{aligned}$$

puisque $\pi(t) = O(t)$ d'après **1.a**.
3. D'après **2** on a, pour $x > 1$,

$$(1-\varepsilon)\pi(x)\frac{\ln x}{x} + O\left(\frac{\ln x}{x^{\varepsilon}}\right) \leq \frac{\theta(x)}{x} \leq \pi(x)\frac{\ln x}{x} \ .$$

Comme $\ln x/x^{\varepsilon}$ tend vers 0 pour $x \to \infty$, on voit que (TNP) entraîne

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\theta(x)}{x} \leq 1 \text{ et } \liminf_{x\to\infty} \frac{\theta(x)}{x} \geq 1-\varepsilon \ ,$$

ceci pour tout $\varepsilon > 0$, d'où $\lim \theta(x)/x = 1$.

Réciproquement, l'égalité $\lim \theta(x)/x = 1$ entraîne

$$\liminf_{x\to\infty} \pi(x)\frac{\ln x}{x} \geq 1 \text{ et } (1-\varepsilon)\limsup_{x\to\infty} \pi(x)\frac{\ln x}{x} \leq 1 \ ,$$

ceci pour tout $\varepsilon > 0$, d'où $\lim \pi(x)\ln x/x = 1$ et (TNP).
4.a. *Supposons d'abord* qu'il existe λ et une suite (x_n) tendant vers $+\infty$ tels que $x_n \geq a > 0$ et $u(x_n)/x_n \geq \lambda > 1$ pour tout n. Alors, u étant croissante, on a

$$u(x) \geq u(x_n) \geq \lambda x_n \text{ pour } x \geq x_n \ ,$$

d'où (compte tenu de $x_n < \lambda x_n$)

$$\int_{x_n}^{\lambda x_n} \frac{u(x)-x}{x^2}dx \geq \int_{x_n}^{\lambda x_n} \frac{\lambda x_n - x}{x^2}dx = \int_1^{\lambda} \frac{\lambda - t}{t^2}dt \ .$$

La dernière intégrale (obtenue par le changement de variable $x = tx_n$) est strictement positive et indépendante de n. L'hypothèse faite entraîne donc la divergence de $\int_a^\infty (u(x)-x)\,x^{-2}dx$, le critère de Cauchy n'étant pas satisfait.

Supposons maintenant qu'il existe μ et une suite (y_n) tendant vers $+\infty$ tels que $y_n \geq a > 0$ et $u(y_n)/y_n \leq \mu < 1$ pour tout n. Alors on aurait de même $\mu y_n < y_n$ et

$$\int_{\mu y_n}^{y_n} \frac{u(x)-x}{x^2}dx \leq \int_{\mu y_n}^{y_n} \frac{\mu y_n - x}{x^2}dx = \int_{\mu}^{1} \frac{\mu - t}{t^2}dt < 0 \ ,$$

d'où à nouveau la divergence de $\int_a^\infty (u(x)-x)\,x^{-2}dx$.

Conclusion. Si l'on avait

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{u(x)}{x} = L > 1 \ ,$$

on voit que, pour chaque λ tel que $1 < \lambda < L$, il existerait une suite (x_n) tendant vers l'infini, telle que $u(x_n)/x_n \geq \lambda$ pour tout n. On vient de montrer que c'est impossible si l'intégrale $\int_a^\infty (u(x)-x)\,x^{-2}dx$ est convergente ; par suite $L \leq 1$. De même l'inégalité $\liminf u(x)/x < 1$ est impossible. Finalement, la convergence de cette intégrale entraîne

$$\lim_{x\to\infty} \frac{u(x)}{x} = 1 \ .$$

4.b. La réciproque est *fausse* : la fonction

$$u(x) = x\left(1 + \frac{1}{\ln x}\right)$$

est *croissante* pour $x \geq e$ (car $u'(x) = 1 + (\ln x - 1)/(\ln x)^2 \geq 1$ si $\ln x \geq 1$) et vérifie $u(x) \sim x$ pour $x \to \infty$, mais l'intégrale

$$\int_e^\infty \frac{u(x) - x}{x^2} dx = \int_e^\infty \frac{dx}{x \ln x}$$

diverge.

5. D'après (TNP) on a pour $n \to \infty$

$$\pi(p_n) = n \sim \frac{p_n}{\ln p_n} \ .$$

Par suite

$$\ln\left(\frac{n \ln p_n}{p_n}\right) = \ln n - \ln p_n + \ln\ln p_n \to 0 \ ,$$

d'où

$$\frac{\ln n}{\ln p_n} - 1 + \frac{\ln\ln p_n}{\ln p_n} \to 0 \ .$$

Or le dernier terme tend vers 0, d'où $\ln n / \ln p_n \to 1$, c'est-à-dire $\ln n \sim \ln p_n$. Finalement

$$p_n \sim n \ln p_n \sim n \ln n \ .$$

2 Sommation par parties

6. Supposons d'abord que $x = n$ et $y = n - 1$ soient deux *entiers consécutifs* (avec $n \geq 1$). Comme $A(t) = A(n-1)$ pour $n - 1 \leq t < n$, le second membre de (1) est

$$\begin{aligned} &A(n)f(n) - A(n-1)f(n-1) - A(n-1)\int_{n-1}^n f'(t)\,dt \\ &= (A(n) - A(n-1))f(n) = a(n)f(n) \ , \end{aligned}$$

ce qui établit (1) dans ce cas.

Pour x, y entiers, avec $0 \leq y < x$, sommer les égalités précédentes de $n = y + 1$ à $n = x$ donne

$$\sum_{y<n\leq x} a(n)f(n) = A(x)f(x) - A(y)f(y) - \int_y^x A(t)f'(t)\,dt \ .$$

7. Pour $0 \leq y < x$, les parties entières x' et y' de x et y vérifient $y' \leq y < y' + 1$, $x' \leq x < x' + 1$, $0 \leq y' \leq x'$. De plus, pour n entier, l'inégalité $n \leq x$ équivaut à $n \leq x'$, et $n > y$ à $n > y'$. On a $A(t) = A(x')$ pour $x' \leq t \leq x$, d'où

$$A(x)f(x) - A(x')f(x') = A(x')\int_{x'}^x f'(t)\,dt = \int_{x'}^x A(t)f'(t)\,dt \ ,$$

et de même pour y, y'. Par suite

$$\begin{aligned} &A(x)f(x) - A(y)f(y) - \int_y^x A(t)f'(t)\,dt \\ &= A(x')f(x') - A(y')f(y') - \int_{y'}^{x'} A(t)f'(t)\,dt \ . \end{aligned}$$

Le second membre est nul si $y' = x'$, et égal à

$$\sum_{y'<n\leq x'} a(n)f(n) = \sum_{y<n\leq x} a(n)f(n)$$

si $y' < x'$ d'après **6**. Dans les deux cas c'est bien $\sum_{y<n\leq x} a(n)f(n)$, ce qu'il fallait.
8.a. En prenant $f(t) = \ln t$, $y = a$, $x > a$ et $a(n) = 1$ si n est premier, $a(n) = 0$ sinon, on a

$$A(x) = \pi(x) \ , \ \sum_{a<n\leq x} a(n)f(n) = \sum_{p\leq x} f(p) = \theta(x)$$

(car tout nombre premier est $> a$) et (2) résulte de (1).
8.b. En prenant $f(t) = 1/\ln t$, $y = a$, $x > a$ et $a(n) = \ln n$ si n est premier, $a(n) = 0$ sinon, on a

$$A(x) = \theta(x) \ , \ \sum_{a<n\leq x} a(n)f(n) = \sum_{p\leq x} \ln p \cdot \frac{1}{\ln p} = \pi(x)$$

et (3) résulte de (1).
[Les égalités (2) et (3) ne seront pas utilisées dans la suite.]
9.a. Le coefficient binomial

$$C_{2n+1}^{n} = \frac{(2n+1)2n\cdots(n+2)}{n!}$$

est un entier ≥ 1. Tout nombre premier p compris entre $n+2$ et $2n+1$ est facteur premier du numérateur, et ne peut l'être du dénominateur $n!$, donc divise C_{2n+1}^{n}. Par suite le produit de tous ces nombres p divise C_{2n+1}^{n}.

D'autre part

$$2^{2n+1} = (1+1)^{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} C_{2n+1}^{k} > C_{2n+1}^{n} + C_{2n+1}^{n+1} = 2C_{2n+1}^{n} \ ,$$

d'où $C_{2n+1}^{n} < 2^{2n}$.
9.b. D'après **9.a** on a $\prod_{n+1<p\leq 2n+1} p < 2^{2n}$ d'où, en passant aux logarithmes,

$$\theta(2n+1) - \theta(n+1) < 2n \ln 2 \ .$$

Comme $2n+2$ n'est pas premier pour $n \geq 1$, on a ainsi

$$\theta(2n+1) = \theta(2n+2) < 2n \ln 2 + \theta(n+1) \ , \ n \geq 1 \ .$$

Montrons par récurrence sur $N \geq 1$ la propriété :

$$\theta(n) < 2n \ln 2 \text{ pour } 1 \leq n \leq 2^{N} \ .$$

- Pour $N = 1$ on a directement $\theta(1) = 0$, $\theta(2) = \ln 2$, d'où la propriété.
- De N à $N+1$. Si $2n+1 \leq 2^{N+1}$, alors on a aussi $2n+2 \leq 2^{N+1}$ d'où $n+1 \leq 2^{N}$ et, par l'hypothèse de récurrence,

  $$\theta(n+1) < 2(n+1) \ln 2 \, ;$$

  de là on déduit

  $$\theta(2n+1) < 2n \ln 2 + 2(n+1) \ln 2 = 2(2n+1) \ln 2 \ ,$$

  ce qu'il fallait. Si $2n+2 \leq 2^{N+1}$, alors $n+1 \leq 2^{N}$ et de même

  $$\theta(2n+2) < 2(2n+1) \ln 2 < 2(2n+2) \ln 2 \ .$$

Par suite on a $\theta(n) < 2n \ln 2$ pour tout $n \geq 1$.
9.c. Soit à nouveau x' la partie entière de $x \geq 1$. D'après **9.b** on a

$$\theta(x) = \theta(x') < 2x' \ln 2 \leq 2x \ln 2 \ .$$

10. Appliquer (1) avec $f(t) = 1/t^s$, $y = 1$, $x > 1$ et $a(n) = \ln n$ si n est premier, $a(n) = 0$ sinon, donne

$$A(x) = \theta(x) \ , \quad \sum_{y<n\leq x} a(n) f(n) = \sum_{1<p\leq x} \frac{\ln p}{p^s}$$

et, compte tenu de $\theta(1) = 0$,

$$\sum_{p\leq x} \frac{\ln p}{p^s} = \frac{\theta(x)}{x^s} + s \int_1^x \frac{\theta(t)}{t^{s+1}} dt \ .$$

Supposons $\operatorname{Re} s > 1$. Au second membre le terme $\theta(x) x^{-s}$ tend vers 0 quand x tend vers l'infini, car $\theta(x) = O(x)$ d'après **9.c**. De même $\theta(t) t^{-s-1} = O\left(t^{-\operatorname{Re} s}\right)$, ce qui assure la convergence de l'intégrale

$$\int_1^\infty \frac{\theta(t)}{t^{s+1}} dt \ .$$

On en déduit l'*existence* de

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{p\leq x} \frac{\ln p}{p^s} = \varphi(s)$$

et l'égalité

$$\varphi(s) = s \int_1^\infty \frac{\theta(t)}{t^{s+1}} dt \ , \ \operatorname{Re} s > 1 \ .$$

Retrancher aux deux membres

$$\frac{s}{s-1} = s \int_1^\infty \frac{t \, dt}{t^{s+1}}$$

donne (4).

3 Un théorème taubérien

Remarque. Comme f est bornée, la fonction $g(z)$ est bien définie et holomorphe dans le demi-plan $\operatorname{Re} z > 0$, d'après la version holomorphe du théorème de convergence dominée ; en effet

$$\left| f(t) e^{-tz} \right| \leq M e^{-ta} \text{ pour } t \geq 0 \text{ et } \operatorname{Re} z \geq a > 0 \ .$$

La fonction h est, quant à elle, holomorphe dans $\mathbb{C}$ entier.
11.a. Pour $\lambda > 0$ et $x = \operatorname{Re} z < 0$ on a

$$\begin{aligned} \left| e^{\lambda z} h(z) \right| &= \left| \int_0^\lambda f(t) e^{(\lambda - t)z} dt \right| \\ &\leq M \int_0^\lambda e^{(\lambda-t)x} dt = M \int_0^\lambda e^{tx} dt \\ &\leq M \int_0^\infty e^{tx} dt = \frac{M}{|x|} \ . \end{aligned}$$

11.b. Pour $|z| = R$ on a

$$\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2} = \frac{1}{z} + \frac{z}{z\overline{z}} = \frac{\overline{z} + z}{z\overline{z}} = \frac{2x}{R^2} \ .$$

Si de plus $x > 0$ on en déduit

$$\begin{aligned}|v(z) - u(z)| &= \frac{2x}{R^2} \left| \int_\lambda^\infty f(t) e^{(\lambda - t)z} dt \right| \\ &\le \frac{2x}{R^2} M \int_\lambda^\infty e^{(\lambda - t)x} dt = \frac{2M}{R^2} \ .\end{aligned}$$

12.a. Si Ω est un ouvert de $\mathbb{C}$ contenant le demi-plan $\operatorname{Re} z \ge 0$, chaque point iy (avec $|y| \le R$) est donc le centre d'une boule contenue dans Ω.
Raisonnons ici avec la norme $\|.\|_\infty$ du plan : les boules sont alors des carrés à côtés parallèles aux axes de coordonnées. Le segment vertical $[-iR, iR]$ est compact, on peut donc le recouvrir par un nombre fini de telles boules. Soit $\alpha > 0$ le plus petit de leurs rayons (on peut supposer $\alpha < R$). Le rectangle $-\alpha \le x \le 0$, $-R \le y \le R$ est alors contenu dans Ω, d'où $D(R, \varepsilon) \subset \Omega$ pour $0 < \varepsilon \le \alpha$.
12.b. Comme g est holomorphe dans Ω par hypothèse, et h dans $\mathbb{C}$ entier, on voit que u et v sont holomorphes dans $\Omega \setminus \{0\}$. Le lacet $C(R, \varepsilon)$ entoure une fois l'origine dans cet ouvert, et le théorème de Cauchy permet d'écrire

$$\begin{aligned}\int_{C(R,\varepsilon)} (v(z) - u(z))\, dz &= \int_{C(R,\varepsilon)} e^{\lambda z} (g(z) - h(z)) \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2} \right) dz \\ &= \int_{C(R,\varepsilon)} e^{\lambda z} (g(z) - h(z)) \frac{dz}{z} \\ &= 2i\pi (g(0) - h(0)) \ .\end{aligned}$$

13.a. Sur C_+ on a $\operatorname{Re} z > 0$ et $|z| = R$. L'inégalité de **11.b** est donc applicable :

$$|v(z) - u(z)| \le \frac{2M}{R^2} \ .$$

Comme la longueur de C_+ est πR, on a immédiatement

$$|I_+| \le \frac{2M}{R^2} . \pi R = \frac{2\pi M}{R} \ .$$

13.b. Dans l'ouvert $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ la fonction u est holomorphe, et les chemins C_-, C'_- sont homotopes à extrémités fixes $\pm iR$ d'où, par le théorème de Cauchy,

$$J_- = \int_{C'_-} u(z)\, dz \ .$$

D'après **11.a** on a sur C'_-

$$|u(z)| = \left| e^{\lambda z} h(z) \right| \left| \frac{1}{z} + \frac{z}{R^2} \right| \le \frac{M}{|x|} . \frac{2|x|}{R^2} = \frac{2M}{R^2} \ .$$

Comme la longueur de C'_- est πR, il vient

$$|J_-| \le \frac{2M}{R^2} . \pi R = \frac{2\pi M}{R} \ .$$

13.c. La fonction g, holomorphe sur Ω par hypothèse, est bornée sur le compact $D(R, \alpha)$ par un nombre $G(R)$ qui ne dépend que de R (rappelons que α se déduit de R, cf. **12.a**).

Sur les arcs de cercle $|z| = R$, $-\varepsilon \leq \operatorname{Re} z = x < 0$ on a (voir le début de **11.b**)

$$|v(z)| = e^{\lambda x}|g(z)|\left|\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2}\right| \leq G(R)\frac{2|x|}{R^2}$$
$$\leq 2G(R)\frac{\varepsilon}{R^2} .$$

Chacun de ces deux arcs a pour longueur $R\arcsin(\varepsilon/R)$ d'où, pour la portion correspondante de l'intégrale,

$$\left|\int v(z)\,dz\right| \leq 2G(R)\frac{\varepsilon}{R^2}.2R\arcsin\frac{\varepsilon}{R} .$$

Or la convexité de la fonction arcsin sur $[0,1]$ donne $\arcsin t \leq (\pi/2)t$ pour $0 \leq t \leq 1$, et

$$\left|\int v(z)\,dz\right| \leq 2\pi G(R)\frac{\varepsilon^2}{R^2}$$

(compte tenu de $0 < \varepsilon \leq \alpha < R$).

D'autre part on a sur le segment vertical $\operatorname{Re} z = -\varepsilon$, $|z| \leq R$

$$|v(z)| \leq e^{-\lambda\varepsilon}G(R)\left(\frac{1}{|z|} + \frac{|z|}{R^2}\right) \leq e^{-\lambda\varepsilon}G(R)\left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{R}\right) ,$$

puisque $\varepsilon \leq |z| \leq R$. Ce segment est de longueur $< 2R$ d'où, pour la portion correspondante de l'intégrale,

$$\left|\int v(z)\,dz\right| \leq 2G(R)\left(\frac{R}{\varepsilon} + 1\right)e^{-\lambda\varepsilon} .$$

En réunissant les deux portions il vient finalement

$$|K_-| \leq 2G(R)\left(\pi\frac{\varepsilon^2}{R^2} + \left(\frac{R}{\varepsilon} + 1\right)e^{-\lambda\varepsilon}\right) .$$

14. Comme $h(0) = \int_0^\lambda f(t)\,dt$ on a, d'après **12.b**, **13.a** et **13.b**,

$$2\pi\left|g(0) - \int_0^\lambda f(t)\,dt\right| \leq |I_+| + |J_-| + |K_-|$$
$$\leq 4\pi\frac{M}{R} + 2\pi G(R)\frac{\varepsilon^2}{R^2} + 2G(R)\left(\frac{R}{\varepsilon} + 1\right)e^{-\lambda\varepsilon} .$$

Cette inégalité est valable pour $\lambda > 0$, $R > 0$ et $0 < \varepsilon \leq \alpha = \alpha(R)$.
Soit alors $\eta > 0$.

– On peut choisir R assez grand pour que $4\pi M/R \leq \eta$.
– On peut ensuite choisir $\varepsilon > 0$ assez petit pour que $\varepsilon \leq \alpha(R)$ et

$$2\pi G(R)\frac{\varepsilon^2}{R^2} \leq \eta .$$

– On peut enfin choisir λ_o assez grand pour que

$$2G(R)\left(\frac{R}{\varepsilon} + 1\right)e^{-\lambda_o\varepsilon} \leq \eta .$$

On obtient finalement

$$2\pi\left|g(0) - \int_0^\lambda f(t)\,dt\right| \leq 3\eta$$

pour tout $\lambda \geq \lambda_o$. L'intégrale $\int_0^\infty f(t)\,dt$ est donc convergente (et vaut $g(0)$).

4 Fonction ζ

[Sur les propriétés de la fonction ζ admises ici (développement en produit infini et développement en série de la dérivée logarithmique), voir par exemple Valiron, *Théorie des fonctions*, p.59 et Dieudonné, *Calcul infinitésimal*, p.268.]

15. Comme $|n^{-s}| = n^{-\operatorname{Re} s} \leq n^{-a}$ pour $\operatorname{Re} s \geq a > 1$ et $n \geq 1$, la série $\sum_1^\infty n^{-s}$ converge normalement dans tout demi-plan $\operatorname{Re} s \geq a$. Sa somme $\zeta(s)$ est donc holomorphe dans $\operatorname{Re} s > 1$.

16.a. Pour $n \leq x \leq n+1$ et $\operatorname{Re} s > 0$ on a $n^{-s} - x^{-s} = s \int_n^x t^{-s-1} dt$, d'où

$$\left| n^{-s} - x^{-s} \right| \leq |s| \int_n^{n+1} n^{-\operatorname{Re} s - 1} dt = |s| n^{-\operatorname{Re} s - 1} \ .$$

En intégrant en x de n à $n+1$ il vient

$$\left| n^{-s} - \int_n^{n+1} x^{-s} dx \right| = \left| \int_n^{n+1} \left(n^{-s} - x^{-s} \right) dx \right| \leq |s| n^{-\operatorname{Re} s - 1} \ .$$

16.b. L'inégalité de **16.a** montre que la série

$$\sum_{n=1}^\infty \left(n^{-s} - \int_n^{n+1} x^{-s} dx \right)$$

converge normalement dans le domaine défini par $|s| \leq A$, $\operatorname{Re} s \geq a$, pour tous a, A strictement positifs. Sa somme $\psi(s)$ est donc une fonction holomorphe dans la réunion de ces domaines, i.e. le demi-plan $\operatorname{Re} s > 0$.

Or la somme de cette série peut s'écrire, pour $\operatorname{Re} s > 1$,

$$\sum_{n=1}^\infty n^{-s} - \int_1^\infty x^{-s} dx = \zeta(s) - \frac{1}{s-1} \ ;$$

cette fonction admet donc un prolongement holomorphe sur le demi-plan $\operatorname{Re} s > 0$.

17.a. On a d'abord $3 + 4\cos\alpha + \cos 2\alpha = 2(1+\cos\alpha)^2 \geq 0$.

Pour $z = re^{i\alpha}$, avec $0 \leq r < 1$ et α réel, le développement classique de la détermination principale de $\ln(1-z)$ conduit à

$$\ln|1-z| = \operatorname{Re}\ln(1-z) = -\operatorname{Re}\sum_{n=1}^\infty \frac{z^n}{n} = -\sum_{n=1}^\infty \frac{r^n}{n}\cos n\alpha \ .$$

Par suite

$$\begin{aligned} & 3\ln|1-r| + 4\ln|1-re^{i\alpha}| + \ln|1-re^{2i\alpha}| \\ & = -\sum_{n=1}^\infty \frac{r^n}{n}(3 + 4\cos n\alpha + \cos 2n\alpha) \end{aligned}$$

est négatif d'après l'inégalité préliminaire (avec $n\alpha$ au lieu de α), d'où

$$|1-r|^3 \left|1-re^{i\alpha}\right|^4 \left|1-re^{2i\alpha}\right| \leq 1 \ .$$

17.b. Pour p premier, $\sigma > 1$ et τ réel, appliquons l'inégalité précédente avec

$$r = p^{-\sigma} \ , \ \alpha = -\tau \ln p \ , \text{ d'où } re^{i\alpha} = p^{-(\sigma+i\tau)} \ , \ re^{2i\alpha} = p^{-(\sigma+2i\tau)} \ .$$

On en déduit en faisant le produit sur p

$$\prod_p \frac{1}{|1-p^{-\sigma}|^3} \cdot \frac{1}{|1-p^{-\sigma-i\tau}|^4} \cdot \frac{1}{|1-p^{-\sigma-2i\tau}|} \geq 1 \ ,$$

ce qui est l'inégalité (5) demandée.
17.c. Fixons $\tau \neq 0$ et faisons tendre σ vers 1 (par valeurs > 1). D'après **16.b** on a

$$\zeta(\sigma) \sim \frac{1}{\sigma - 1} \ .$$

Si ζ admettait un zéro d'ordre $k \geq 1$ en $1 + i\tau$, on aurait

$$\zeta(\sigma + i\tau) \sim C\left((\sigma + i\tau) - (1 + i\tau)\right)^k = C(\sigma - 1)^k \ ,$$

où C est un coefficient non nul, d'où

$$\left|\zeta(\sigma)^3 \zeta(\sigma + i\tau)^4\right| \sim C^4 (\sigma - 1)^{4k-3} \ ,$$

qui tend vers 0 quand $\sigma \to 1$. Comme $\zeta(\sigma + 2i\tau) \to \zeta(1 + 2i\tau)$, ceci contredirait l'inégalité de **17.b**. Par suite $\zeta(1 + i\tau) \neq 0$ pour $\tau \neq 0$.
18.a. Pour $\operatorname{Re} s > 1$ on peut écrire

$$\varphi(s) + \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_p \frac{\ln p}{p^s} - \sum_p \frac{\ln p}{p^s - 1} = -\sum_p \frac{\ln p}{p^s(p^s - 1)} \ .$$

Soit $\varepsilon > 0$. Pour $\operatorname{Re} s \geq a > \frac{1}{2} + \varepsilon$ on a

$$\left|\frac{\ln p}{p^s(p^s - 1)}\right| \leq \frac{\ln p}{p^a(p^a - 1)} \ .$$

Notons $\alpha(p)$ le second membre de cette inégalité. Comme $p^{2a-2\varepsilon}\alpha(p) \sim p^{-2\varepsilon} \ln p \to 0$ quand $p \to \infty$, on voit que $\alpha(p) = o(p^{2\varepsilon - 2a})$ d'où, grâce à **1.b**, $\alpha(p_n) = o(n^{2\varepsilon - 2a})$. Comme on a pris $2a - 2\varepsilon > 1$, ceci entraîne la convergence de la série $\sum_p \ln p / p^s(p^s - 1)$, normalement pour $\operatorname{Re} s \geq a$. La somme de cette série définit donc une fonction holomorphe de s dans $\operatorname{Re} s > 1/2$, qui prolonge $\varphi + \zeta'/\zeta$ à ce demi-plan.
18.b. Comme

$$\varphi(s) - \frac{s}{s-1} = \left(\varphi(s) + \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right) - \left(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \frac{s}{s-1}\right) \ ,$$

il suffit d'après **18.a** de montrer que la deuxième parenthèse se prolonge en une fonction holomorphe à un ouvert contenant $\operatorname{Re} s \geq 1$.

Or le développement en série

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\sum_p \frac{\ln p}{p^s - 1}$$

montre que ζ'/ζ est a priori holomorphe dans $\operatorname{Re} s > 1$. Il reste donc à étudier $(\zeta'/\zeta) + (s/s-1)$ au voisinage de chaque point de la droite $\operatorname{Re} s = 1$.

- D'après **16.b** et **17.c**, ζ et ζ' sont holomorphes au voisinage de $s = 1 + i\tau$, $\tau \neq 0$, et ζ ne s'annule pas en ce point. Par suite $(\zeta'/\zeta) + (s/s-1)$ est holomorphe au voisinage.
- D'après **16.b** on peut écrire, pour s voisin de 1 et $s \neq 1$,

$$\begin{aligned}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \frac{s}{s-1} &= \frac{-\frac{1}{(s-1)^2} + \psi'(s)}{\frac{1}{s-1} + \psi(s)} + \frac{s}{s-1} \\ &= \frac{1 + s\psi(s) + (s-1)\psi'(s)}{1 + (s-1)\psi(s)} \ .\end{aligned}$$

  Cette fonction se prolonge donc holomorphiquement au voisinage de $s = 1$ (car ψ est holomorphe dans $\operatorname{Re} s > 0$), ce qu'il fallait établir.

19. On peut maintenant assembler toutes les pièces du puzzle !

- La définition de θ montre que $f(t)$ est continue par morceaux sur $[0,\infty[$, avec discontinuités aux points $t = \ln 2, \ln 3, \ldots, \ln p, \ldots$ Donc f est *intégrable sur tout compact de* $[0,\infty[$.
- D'après **9.c** on a $-1 \leq f(t) \leq C-1$ pour $t \geq 0$, et f est *bornée sur* $[0,\infty[$.
- Considérons pour $\operatorname{Re} z > 0$ l'intégrale

  $$g(z) = \int_0^\infty f(t)e^{-tz}dt \ .$$

  Le changement de variable $x = e^t$ donne

  $$g(z) = \int_1^\infty \frac{\theta(x)-x}{x^{z+2}}dx \ , \ \operatorname{Re} z > 0$$

  d'où, d'après (4) de **10**,

  $$g(s-1) = \frac{1}{s}\left(\varphi(s) - \frac{s}{s-1}\right) \ , \ \operatorname{Re} s > 1 \ .$$

  D'après **18.b** cette fonction se prolonge à un ouvert contenant $\operatorname{Re} s \geq 1$, donc $g(z)$ se prolonge en une fonction holomorphe sur un ouvert contenant $\operatorname{Re} z \geq 0$.
- Les hypothèses du théorème taubérien sont donc satisfaites. On en conclut que l'intégrale

  $$\int_0^\infty f(t)\,dt = \int_1^\infty \frac{\theta(x)-x}{x^2}dx$$

  est convergente.
- Comme θ est une fonction *croissante* sur $[1,\infty[$, on en déduit $\theta(x) \sim x$ pour $x \to \infty$ d'après **4.a**, d'où le Théorème des Nombres Premiers d'après **3**.