Agrégation de mathématiques (F. Rouvière) **Concours blanc du 29.1.02**

PROBLÈME D'ANALYSE

Le but du problème est d'étudier la dérivabilité de la *fonction de Riemann* (d'une variable réelle x)

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi n^2 x)}{\pi n^2} \ . \tag{1}$$

Riemann pensait (mais n'a pas démontré) que cette fonction n'est dérivable en aucun point. Weierstrass ne parvint pas à l'établir. En 1916, Hardy montra que f n'est dérivable en aucun point irrationnel. Ce n'est qu'en 1970 qu'un jeune étudiant américain, Joseph Gerver, résolut complètement la question (par des méthodes élémentaires, mais compliquées) : f est dérivable au point x_o si et seulement si x_o est le quotient de deux entiers impairs. On va établir ici par des méthodes plus récentes (utilisant la fonction θ et un peu de théorie des ondelettes) la dérivabilité de f en tout point entier impair, et sa non-dérivabilité en tout entier pair ainsi qu'aux points irrationnels.

Soient $\alpha \in]0,1]$ et $x_o \in \mathbb{R}$. Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite *höldérienne d'ordre α en x_o* s'il existe $C > 0$ tel que, pour tout $h \in \mathbb{R}$,

$$|f(x_o + h) - f(x_o)| \leq C|h|^{\alpha} \ . \tag{2}$$

Elle est dite *höldérienne d'ordre α sur* $\mathbb{R}$ s'il existe $C > 0$ tel que l'inégalité (2) ait lieu pour tous $x_o, h \in \mathbb{R}$.

Dans les parties III, IV et V on note P le demi-plan ouvert formé des nombres complexes de partie imaginaire strictement positive.

Le problème fait appel à l'analyse des fonctions d'une variable réelle, ou d'une variable complexe. Ses questions peuvent être résolues indépendamment les unes des autres.

I. Une inégalité höldérienne

1. Montrer qu'une fonction bornée sur $\mathbb{R}$ et dérivable en x_o est höldérienne d'ordre α en x_o, pour tout $\alpha \in]0,1]$.

2. On note $u_n(x) = \sin(\pi n^2 x)/\pi n^2$, et N un entier positif ou nul. À l'aide de majorations simples de $|u_n(x)|$ et de $|u_n'(x)|$, établir les inégalités

$$\sum_{1 \leq n \leq 2^N} |u_n(x+h) - u_n(x)| \leq 2^N |h| \text{ et } \sum_{n \geq 2^N + 1} |u_n(x+h) - u_n(x)| \leq \frac{1}{\pi 2^{N-1}} \ ,$$

pour tous $x, h \in \mathbb{R}$.

3. En déduire que la fonction S de Riemann est höldérienne d'ordre $1/2$ sur $\mathbb{R}$.
[Pour $0 < |h| \leq 1$ on choisira N tel que $2^N \leq |h|^{-1/2} < 2^{N+1}$. Puis on vérifiera que la majoration obtenue de $|S(x+h) - S(x)|$ est encore valable pour $|h| \geq 1$.]

II. Formule de Poisson

Soient f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, à valeurs complexes, et

$$\widehat{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2i\pi tx} dx$$

sa transformée de Fourier. On suppose les fonctions $x^2 f(x)$ et $t^2 \widehat{f}(t)$ *bornées sur* $\mathbb{R}$.

4. Soit

$$g(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{x}{2\pi} + k\right) .$$

Montrer que g est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique.

5. Montrer que les coefficients de Fourier de g sont donnés par $c_n(g) = \widehat{f}(n)$, $n \in \mathbb{Z}$. Montrer que g est somme de sa série de Fourier, et en déduire la *formule de Poisson*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) .$$

6. On rappelle que la fonction $e^{-\pi x^2}$ a pour transformée de Fourier $e^{-\pi t^2}$. En déduire l'identité, pour $a > 0$,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\pi k^2 a} = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2/a} . \tag{3}$$

III. Étude en un entier impair

On considère les fonctions de la variable complexe z

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{i\pi n^2 z}}{i\pi n^2} \text{ et } \theta(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{i\pi n^2 z} . \tag{4}$$

7. Montrer que F est continue et bornée dans le demi-plan fermé $\overline{P}$, et que F et θ sont holomorphes dans P.

8. Vérifier l'égalité $2F'(z) = \theta(z) - 1$ pour $z \in P$.

9. Montrer qu'on a, pour $y = \operatorname{Im} z > 0$,

$$|\theta(z) - 1| \leq \frac{2e^{-\pi y}}{1 - e^{-\pi y}} .$$

10. Etablir l'identité $\theta(z+1) + \theta(z) = 2\theta(4z)$ pour $z \in P$.

11. On note $\sqrt{z}$ la détermination de la racine carrée qui prolonge au demi-plan $\mathrm{Re}\, z > 0$ la racine carrée des nombres positifs. Déduire de (3) que

$$\theta(z) = \sqrt{\frac{i}{z}}\,\theta\left(-\frac{1}{z}\right) \ , \ z \in P. \tag{5}$$

Pour $n \geq 1$ on note

$$v_n(z) = \sqrt{\frac{i}{z}}\, e^{-i\pi n^2/z} \ .$$

12. Déduire des questions précédentes l'identité

$$F'(1+z) + \frac{1}{2} = -\sum_{n=1}^{\infty} v_n(z) + 2\sum_{n=1}^{\infty} v_n(4z) \ .$$

13. Soit α un nombre complexe de partie réelle strictement positive. Montrer la convergence de l'intégrale $\int_0^1 e^{-\alpha/t} \frac{dt}{\sqrt{t}}$ et l'inégalité

$$\left| \int_0^1 e^{-\alpha/t} \frac{dt}{\sqrt{t}} \right| \leq \frac{2}{|\alpha|} \ .$$

[On pourra intégrer par parties.]

14. En déduire les inégalités, pour $z = re^{i\omega} \in P$,

$$\int_0^1 |v_n(tz)|\, dt \leq \frac{2\sqrt{r}}{\pi n^2 \sin\omega} \quad \text{et} \quad \left| \int_0^1 v_n(tz)\, dt \right| \leq \frac{2\sqrt{r}}{\pi n^2} \ .$$

15. A l'aide de **12** et **14** montrer que

$$\left| F(1+z) - F(1) + \frac{z}{2} \right| \leq C|z|^{3/2} \ \text{pour } z \in P \ ,$$

où C est une constante que l'on calculera.

16. a. En déduire que la restriction de F à l'axe réel est dérivable en $x_o = 1$, et calculer sa dérivée en ce point.

b. Montrer enfin que la fonction S de Riemann est dérivable aux points $x_o = 2p+1$, $p \in \mathbb{Z}$, et calculer $S'(2p+1)$.

IV. Étude en un entier pair

Soient $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue, et $\overline{\psi}$ sa complexe conjuguée. On suppose que
(i) $x^2\psi(x)$ est une fonction bornée sur $\mathbb{R}$
(ii) $\int_{\mathbb{R}} \psi(x)\, dx = 0$.
On dit alors que ψ est une “ ondelette ”. Si f est une fonction continue bornée sur $\mathbb{R}$ on définit, pour $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$,

$$w_f(a,b) = \frac{1}{a} \int_{\mathbb{R}} f(x)\, \overline{\psi}\left(\frac{x-b}{a}\right) dx \ .$$

17. a. Établir l'inégalité $(u+v)^\alpha \leq u^\alpha + v^\alpha$ pour $u, v \geq 0$ et $0 < \alpha \leq 1$.

b. Si f est höldérienne d'ordre α en x_o, avec $0 < \alpha < 1$, montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$|w_f(a,b)| \leq C\left(a^\alpha + |b - x_o|^\alpha\right) \ .$$

[On pourra soustraire à w_f l'intégrale analogue associée à la fonction constante $f(x_o)$.]

18. Dans toute la suite du problème on prend pour ψ " l'ondelette de Lusin "

$$\psi(x) = \frac{1}{\pi(x+i)^2} \ .$$

Montrer qu'elle vérifie les hypothèses (i) et (ii).

19. Soit F une fonction d'une variable complexe, holomorphe dans P, continue et bornée sur $\overline{P}$, et soit ζ un nombre complexe. Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{F(x)}{(x-\zeta)^2} dx = \begin{cases} 2i\pi F'(\zeta) & \text{si } \operatorname{Im}\zeta > 0 \\ 0 & \text{si } \operatorname{Im}\zeta < 0 \end{cases}$$

[On pourra considérer $\int_\gamma F(z)dz/(z-\zeta)^2$, où γ est le bord du rectangle défini par $-R < \operatorname{Re} z < R$, $0 < \varepsilon < \operatorname{Im} z < R$, puis faire tendre ε vers 0 et enfin R vers $+\infty$.]

20. On reprend la fonction F définie en (4). En observant que $2S(x) = F(x) - F(-x)$ déduire de **19** que, pour $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$,

$$w_S(a,b) = \frac{ia}{2}\left(\theta(b+ia) - 1\right) \ . \tag{6}$$

21. a. Soit $x_o \in 2\mathbb{Z}$ un entier pair. Montrer à l'aide de (3) que, pour $a > 0$,

$$w_S(a, x_o) = \frac{i\sqrt{a}}{2}\left(\theta\left(\frac{i}{a}\right) - \sqrt{a}\right) \ .$$

En déduire, à l'aide de **9**, l'équivalent $w_S(a, x_o) \sim i\sqrt{a}/2$ lorsque a tend vers 0.

b. Pour quels $\alpha \in]0,1[$ la fonction de Riemann est-elle höldérienne d'ordre α en x_o ? Est-elle dérivable en ce point ?

V. Étude en un point irrationnel

Dans cette partie on reprend les méthodes de la partie IV, après avoir établi quelques propriétés supplémentaires de la fonction θ.

Soit Γ le groupe de transformations du demi-plan P engendré par la translation $T : z \mapsto z+2$ et par la transformation $J : z \mapsto -1/z$.

22. Montrer que les éléments γ de Γ sont de la forme

$$\gamma(z) = \frac{rz+s}{qz-p} \ , \ z \in P \ , \tag{7}$$

avec $p, q, r, s \in \mathbb{Z}$, $rp + sq + 1 = 0$, et p, q de parités opposées.

23. a. Montrer à l'aide de (5) que pour $z \in P$ et $\gamma \in \Gamma$ (donné par (7)) il existe un nombre complexe u, de module un, tel que

$$\theta(\gamma(z)) = u\,\theta(z)\sqrt{|qz-p|}\ .$$

b. On prend $b = p/q$, $q \geq 1$, et $a > 0$. En déduire l'égalité

$$\theta(b+ia) = u\,\theta\left(\frac{r}{q} + \frac{i}{aq^2}\right)(aq)^{-1/2}\ , \tag{8}$$

où u est un nombre complexe de module un.

24. À l'aide de **9**, montrer qu'il existe une constante $A > 0$ telle que

$$|\theta(z)| \geq A \text{ pour } \operatorname{Im} z \geq 1\ . \tag{9}$$

Soit maintenant x_o un nombre irrationnel. On admettra qu'il existe une suite de rationnels p_n/q_n (donnés par la théorie des fractions continues) avec $p_n, q_n \in \mathbb{Z}$, p_n et q_n de parités opposées, q_n tendant vers $+\infty$, et une suite de réels $\tau_n > 2$ tels que

$$\left|x_o - \frac{p_n}{q_n}\right| = \frac{1}{q_n^{\tau_n}}$$

pour tout $n \geq 1$. On admettra enfin qu'il existe un élément γ_n de Γ de la forme $\gamma_n(z) = (r_n z + s_n)\,/\,(q_n z - p_n)$, avec $r_n, q_n \in \mathbb{Z}$, $r_n p_n + s_n q_n + 1 = 0$.

On définit alors

$$b_n = \frac{p_n}{q_n} \text{ et } a_n = \left|x_o - \frac{p_n}{q_n}\right| = \frac{1}{q_n^{\tau_n}}\ .$$

25. a. Déduire de (6) et (8) qu'il existe une suite de nombres complexes u_n, de module un, tels que

$$w_S(a_n, b_n) = \frac{i}{2} q_n^{-(\tau_n+1)/2}\left(u_n\,\theta\left(\frac{r_n}{q_n} + iq_n^{\tau_n-2}\right) - q_n^{(1-\tau_n)/2}\right)\ .$$

b. En utilisant (9) montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour n assez grand,

$$|w_S(a_n, b_n)| \geq C\,q_n^{-(\tau_n+1)/2}\ .$$

26. Si la fonction S est höldérienne d'ordre α en x_o, montrer que $\alpha \leq 3/4$. Conclure.