Agrégation Analyse (F. Rouvière) **30.01.91**

$\zeta(3)$ EST IRRATIONNEL

Le problème est consacré à l'étude du nombre

$$\zeta(3) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \; .$$

La première partie, de mise en train, donne des encadrements de $\zeta(3)$ et une première écriture de ce nombre sous forme intégrale.

Les trois parties suivantes aboutissent, par l'étude de certaines intégrales, à une démonstration du résultat proclamé dans le titre. Annoncé par Roger Apéry aux "Journées arithmétiques" de juin 1978 à Marseille-Luminy, ce théorème fit l'effet d'une bombe dans le petit monde mathématique...

On note I l'intervalle ouvert $]0,1[$ et $I^2 = I \times I$, $I^3 = I \times I \times I$. On n'oubliera pas de justifier avec soin la convergence des intégrales et les interversions de limites et d'intégrales.

HORS-D'ŒUVRE

1. Donner une encadrement du reste $R_N = \sum_{N+1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$, et un équivalent de R_N lorsque $N \to \infty$.
2.a. Montrer que

$$\zeta(3) = \frac{5}{4} - \sum_{n \geq 2} \frac{1}{(n-1)n^3(n+1)} \; .$$

b. Montrer que le reste $R'_N = \sum_{N+1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)n^3(n+1)}$ vérifie l'encadrement

$$\frac{1}{4(N+1)^4} < R'_N < \frac{1}{4(N-1)^4} \; .$$

3. Comment pourrait-on améliorer la méthode de **2** en vue d'une meilleure approximation numérique de $\zeta(3)$?
4. Établir l'égalité

$$\zeta(3) = \int\int\int_{I^3} \frac{dxdydz}{1 - xyz} \; .$$

[On pourra développer $(1 - xyz)^{-1}$ en série entière.]

ENTRÉE

Soient k, l deux réels positifs ou nuls. On considère les intégrales

$$A_{kl} = \int\int_{I^2} \frac{-\ln(xy)}{1-xy} x^k y^l dxdy \ , \ B_{kl} = \int\int_{I^2} -\ln(xy)\ x^k y^l dxdy \ .$$

5. Calculer $\int\int_{I^2} x^k y^l dxdy$, et en déduire la valeur de B_{kl}.
[On pourra remplacer k, l par $k+t, l+t$ et dériver par rapport à t.]

Désormais k et l sont des entiers positifs ou nuls.
6.a. Établir les égalités suivantes

$$A_{00} = 2\zeta(3) \ , \ A_{kk} = 2\left(\zeta(3) - 1 - \frac{1}{2^3} - \cdots - \frac{1}{k^3}\right) \text{ si } k \geq 1 \ ,$$
$$A_{kl} = \frac{1}{k-l}\left(\frac{1}{(l+1)^2} + \cdots + \frac{1}{k^2}\right) \text{ si } k > l \geq 0 \ .$$

[On pourra développer $(1-xy)^{-1}$ en série entière.]
b. Pour n entier strictement positif on note d_n le plus petit commun multiple des nombres $1, 2, \ldots, n$. Montrer que, pour $k > l$, le nombre $d_k^3 A_{kl}$ est un entier strictement positif.

PLAT DE RÉSISTANCE

Soient n un entier positif ou nul et P_n le polynôme défini par

$$P_n(x) = \frac{1}{n!}\left(\frac{d}{dx}\right)^n (x^n(1-x)^n) \ .$$

7. Montrer que P_n appartient à $\mathbb{Z}[x]$.
8. On note

$$I_n = \int\int_{I^2} \frac{-\ln(xy)}{1-xy} P_n(x)P_n(y) dxdy \ .$$

Déduire de ce qui précède qu'il existe $a_n, b_n \in \mathbb{Z}$ tels que

$$d_n^3 I_n = a_n + b_n\zeta(3) \ .$$

9.a. Soit f une fonction indéfiniment dérivable sur $[0,1]$. Établir l'égalité

$$\int_0^1 f(x)P_n(x)dx = \frac{(-1)^n}{n!}\int_0^1 x^n(1-x)^n f^{(n)}(x)dx \ .$$

b. Montrer que

$$I_n = \int\int\int_{I^3} \frac{P_n(x)P_n(y)}{1-(1-xy)z} dxdydz \ .$$

c. En déduire l'égalité

$$I_n = \int\int\int_{I^3} (1-x)^n(1-w)^n P_n(y) \frac{dxdydw}{1-(1-xy)w} \ ,$$

où on passe de la variable z à w par

$$1 - w = \frac{xyz}{1-(1-xy)z} \ .$$

d. Montrer enfin que

$$I_n = \int\int\int_{I^3} \varphi(x,y,w)^n \frac{dxdydw}{1-(1-xy)w} \ ,$$

avec

$$\varphi(x,y,w) = \frac{x(1-x)y(1-y)w(1-w)}{1-(1-xy)w} \ .$$

10. Vérifier qu'il existe un nombre α tel que, pour tous $x, y, w \in I$,

$$0 < \varphi(x,y,w) \leq \alpha < \frac{1}{3^3} \ .$$

11. Démontrer l'inégalité

$$0 < a_n + b_n\zeta(3) \leq 2\zeta(3)\alpha^n d_n^3 \ .$$

FROMAGE ET DESSERT

On note $\pi(n)$ le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à n. On rappelle le résultat (admis !)

$$\pi(n) \sim \frac{n}{\ln n}$$

lorsque n tend vers l'infini.

12.a. En raisonnant sur l'exposant de chaque facteur premier de d_n, montrer que $d_n \leq n^{\pi(n)}$.

b. En déduire qu'il existe un entier N tel que $d_n \leq 3^n$ pour $n \geq N$.

13. Démontrer que $\zeta(3)$ est irrationnel.