Agrégation Analyse (F. Rouvière) **18.10.00**

SUITES, SÉRIES, FONCTION CONTINUE NON DÉRIVABLE

1. Valeurs d'adhérence d'une suite.

a. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite *bornée* de $\mathbb{R}$, telle que $u_{n+1} - u_n \to 0$ lorsque $n \to \infty$. On note $\ell = \liminf u_n$, $L = \limsup u_n$. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite (u_n) est l'intervalle $[\ell, L]$ tout entier (on pourra raisonner par l'absurde).

b. *Exemple* : $u_n = \sin(a_o + a_1 + \cdots + a_{n-1})$, avec $\lim a_n = 0$.

c. Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction continue. Déduire de **a** que la suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$, avec $u_o \in [0,1]$, converge si et seulement si $u_{n+1} - u_n \to 0$.

2. La suite $(\sin n)$.

a. Montrer que la suite $(\sin n)_{n\geq 0}$ n'est pas convergente.

b. Montrer qu'elle est dense dans $[-1,1]$ (on pourra montrer d'abord que la suite $(e^{in})_{n\in\mathbb{Z}}$ est dense dans le cercle unité).

3. Fonction continue non dérivable.

On note $\varphi(x)$ la distance du réel x à l'entier le plus proche, et

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \varphi(2^k x) \ .$$

a. Montrer que f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, de période 1. Tracer le graphe des trois premières sommes partielles de la série.

Etant donnés $x_o \in [0,1]$ et un entier $n \geq 0$, on note m la partie entière de $2^n x_o$ et $a_n = m/2^n$, $b_n = (m+1)/2^n$. Soit encore

$$p_n = \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} \ .$$

b. Montrer que $p_{n+1} = p_n \pm 1$.

c. Montrer que, si f est dérivable en x_o, on a $f'(x_o) = \lim_{n\to\infty} p_n$. Conclure.

4. Séries numériques. Soit $\sum_1^\infty u_n$ une série réelle convergente.

a. Montrer que $\sum u_n/n$ et $\sum e^{1/n} u_n$ convergent.

b. Peut-on affirmer la convergence de $\sum u_n^2$? de $\sum u_n^3$?

Références.

1. Leichtnam-Schauer tome 3, p.22 ; Moisan-Vernotte p.13.

2. Pommellet p.23.

3. Tissier, exercice M.2-4. Exemples analogues dans Leichtnam-Schauer tome 3 p. 76 ; Rudin, Principes d'analyse mathématique Th. 7.18 ; Moisan-Vernotte-Tosel p.16 ; Valiron p.160 ; Makarov et al. p.45.

4. Moisan-Vernotte p.115 ; Makarov et al. p.38.