Agrégation Analyse (F. Rouvière) **18.12.01**

DÉVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES

1. Montrer que l'équation $x^n - x - 1 = 0$ a exactement une racine entre 1 et 2, notée x_n. Donner un développement de x_n selon les puissances de $1/n$, limité aux trois premiers termes.
[On pourra écrire l'équation sous la forme $f(x_n) = 1/n$ avec $f(x) = \ln x / \ln(x+1)$.]

2. Donner un équivalent de l'intégrale

$$I(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-tx^2} \ln(1 + x + x^2)\, dx$$

lorsque t tend vers $+\infty$.
[On pourra utiliser un développement à trois termes du logarithme au voisinage de $x = 0$.]

3.a. Soit f une fonction strictement positive et continûment dérivable sur $[a, \infty[$, telle que $\lim_{x\to\infty} f'(x)/f(x) = 0$. Montrer que, lorsque $n \to \infty$,

$$f(n) \sim \int_n^{n+1} f(x)dx \ .$$

[On pourra encadrer $f(x)$ en intégrant de n à x l'inégalité $|f'(x)/f(x)| \le \varepsilon$.]

b. On suppose de plus que l'intégrale $\int_a^\infty f(x)dx$ converge. Déduire de **a** que, pour $n \to \infty$,

$$\sum_{p=n}^{\infty} f(p) \sim \int_n^\infty f(x)dx \ .$$

c. Soit $\alpha > 1$. Par applications répétées de **b** établir le développement, lorsque $n \to \infty$,

$$\sum_{p=n}^{\infty} \frac{1}{p^\alpha} = \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} + \frac{1}{2n^\alpha} + \frac{\alpha}{12n^{\alpha+1}} + O\left(\frac{1}{n^{\alpha+2}}\right) \ .$$

4. Soit (x_n) la suite récurrente définie par

$$0 < x_0 < \pi \ , \ x_{n+1} = \sin x_n \ .$$

Donner les deux premiers termes d'un développement asymptotique de x_n lorsque n tend vers l'infini.
[On pourra étudier la suite auxiliaire $u_n = 1/x_n^2$.]

Références.

1. Tissier, *Mathématiques générales*, Bréal 1991, p.258 (ou p. 246 de la 2ème édition)
2. De Bruijn, *Asymptotic methods in analysis*, Dover 1981, p.60
3. Dieudonné, *Calcul infinitésimal*, Hermann 1968, p.101 sq. ; Tissier, p.303 (ou p.316 de la 2ème éd.)
4. De Bruijn, p.157 ; Chambert-Loir & C°, *Analyse 1*, Masson 1995, p.127.