Agrégation Analyse (F. Rouvière) **26.02.02**

SUITES ÉQUIRÉPARTIES

1. On donne une suite $(x_k)_{k\geq 1}$ de l'intervalle $[0,1]$. Pour $[a,b]\subset[0,1]$ et n entier ≥ 1, on note $N_n(a,b)$ le nombre de termes de la suite, parmi les n premiers $x_1,\dots,x_n$, qui appartiennent à l'intervalle $[a,b]$.

Montrer l'équivalence des trois propriétés suivantes :

(i) La suite (x_k) est *équirépartie* sur $[0,1]$, c'est-à-dire

$$\frac{1}{n}N_n(a,b)\to b-a$$

lorsque $n\to\infty$, pour tout $[a,b]\subset[0,1]$.

(ii) Pour toute fonction $f:[0,1]\to\mathbb{C}$, Riemann-intégrable, on a

$$M_n(f)=\frac{1}{n}\left(f(x_1)+\cdots+f(x_n)\right)\to\int_0^1 f(t)\,dt \tag{1}$$

lorsque $n\to\infty$.

(iii) (*critère de H. Weyl*) Pour tout entier $p\geq 1$, on a

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}e^{2i\pi p x_k}\to 0$$

lorsque $n\to\infty$.

[*Indications* : Pour (i) $\Rightarrow$ (ii), considérer d'abord le cas $f=\chi_{[a,b]}$, puis encadrer une fonction Riemann-intégrable réelle par deux fonctions en escalier. Pour (iii) $\Rightarrow$ (i), montrer (1) pour f polynôme trigonométrique, puis fonction continue 1-périodique ; encadrer enfin $\chi_{[a,b]}$ par deux telles fonctions.]

2. *Exemples.* On note $E(.)$ la partie entière. En utilisant le critère de Weyl, montrer que

a. la suite $x_k=k\alpha-E(k\alpha)$, $k\geq 1$, est équirépartie (donc dense) sur $[0,1]$ pour α irrationnel ;

b. la suite $x_k=\ln k-E(\ln k)$, $k\geq 1$, n'est pas équirépartie, mais est dense, sur $[0,1]$.

[*Indication* : pour **b**, penser à des sommes de Riemann de l'intégrale $\int_0^1 t^{2i\pi p}\,dt$; pour la densité, voir directement que chaque intervalle contient un x_k.]

Références.

– Chambert-Loir et al., *Exercices d'analyse pour l'agrégation*, tome 1, p.131.
– Körner, *Fourier analysis*, p.11-14.
– Pólya et Szegö, *Problems and theorems in analysis*, tome 1, p.88.