

SUITES NUMÉRIQUES

1. Calculs de limites. Calculer $\lim n \sin(2\pi en!)$ et $\lim n \sin\left(\pi(\sqrt{2}+1)^n\right)$ lorsque n tend vers l'infini.

[Pour la seconde on pourra observer que $(1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n$ est entier...]

2. "Règle de l'Hospital" pour les suites. Si (a_n) est une suite réelle on note $\Delta a_n = a_n - a_{n-1}$.

a. Soit (b_n) une suite strictement croissante qui tend vers l'infini. On suppose que $c_n = \Delta a_n / \Delta b_n \rightarrow \ell \in \mathbb{R}$ lorsque n tend vers l'infini. Montrer que $a_n / b_n \rightarrow \ell$.

[On pourra considérer l'expression $(\sum_1^n \lambda_k c_k) / (\sum_1^n \lambda_k)$ avec $\lambda_k = \Delta b_k$.]

b. Application. Pour $\alpha > -1$ montrer que, lorsque $n \rightarrow \infty$,

$$\sum_{k=1}^n k^\alpha \sim \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}.$$

3. Valeurs d'adhérence.

a. Soit (x_n) une suite bornée de \mathbb{R} , telle que $x_{n+1} - x_n \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$. On note $\ell = \liminf x_n$, $L = \limsup x_n$. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite (x_n) est le segment $[\ell, L]$.

[On pourra raisonner par l'absurde, en supposant qu'il existe un point entre ℓ et L qui ne soit pas valeur d'adhérence.]

b. Exemple : $x_n = \sin(\theta_0 + \theta_1 + \dots + \theta_n)$ avec $\lim \theta_n = 0$.

4. Limite supérieure et limite inférieure. On considère une suite (x_n) de \mathbb{R} dont chaque terme est inférieur à la moyenne des deux précédents. On veut montrer que la suite converge, vers une limite finie ou vers $-\infty$.

a. Montrer que la suite est majorée. Est-elle décroissante?

b. Soient $\ell = \liminf x_n$, $L = \limsup x_n$ et $\varepsilon > 0$. Montrer l'existence de k tel que $x_k \leq \ell + \varepsilon$ et $x_{k-1} \leq L + \varepsilon$, et en déduire une majoration de x_n pour $n \geq k$. Conclure que $\ell = L$.

5. Racines carrées itérées.

a. On donne $a > 0$. Montrer que la suite des

$$a_n = \sqrt{a + \sqrt{a + \dots \sqrt{a}}}, \quad n \geq 1,$$

(n racines carrées) converge, et calculer sa limite ℓ .

b. Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite de nombres strictement positifs. Déduire de **a** que la suite des

$$x_n = \sqrt{u_1 + \sqrt{u_2 + \dots \sqrt{u_n}}}, \quad n \geq 1,$$

converge si et seulement si la suite des $2^{-n} \ln u_n$ est majorée.

Références.

1. Makarov et al., *Selected problems in real analysis*, p.17

2. Makarov p.20

3. Tissier-Mialet, *Analyse à une variable réelle*, p.75

Leichtnam, *Exercices corrigés, Analyse*, p.27

4. Makarov p.22

5. Makarov p.18.