ÉQUIVALENTS

Dans toute la suite f désigne une fonction *strictement positive* et continue par morceaux sur une demi-droite $[a, \infty[$. On suppose que l'intégrale $\int_a^\infty f(t)dt$ *est divergente.*

1.a. Soit $g : [a, \infty[\to \mathbb{C}$ une autre fonction continue par morceaux, avec $g(x) \sim f(x)$ lorsque $x \to \infty$. Montrer que, pour $x \to \infty$,

$$\int_a^x g(t)\ dt \sim \int_a^x f(t)\ dt\ .$$

b. Énoncer et démontrer le résultat analogue pour les séries numériques. [On pourra reprendre la démonstration de **a**, ou l'appliquer directement.]

2.a. On suppose f continûment dérivable, avec $f'(x)/f(x) \to 0$ quand $x \to \infty$. Montrer que, pour $n \to \infty$,

$$f(n) \sim f(n+1) \sim \int_n^{n+1} f(t)\ dt\ .$$

[On pourra intégrer de n à t l'inégalité $|f'(x)/f(x)| \leq \varepsilon$.]

b. En déduire l'équivalent, pour $n \to \infty$,

$$\sum_{a \leq k \leq n} f(k) \sim \int_a^n f(t)\ dt\ .$$

3. On suppose f continûment dérivable, avec $xf'(x)/f(x) \to \alpha$ quand $x \to \infty$ (hypothèse plus forte qu'en **2.a**) et $\alpha > -1$. Montrer que, pour $x \to \infty$,

$$\int_a^x f(t)\ dt \sim \frac{xf(x)}{\alpha + 1}\ .$$

[On pourra appliquer **1.a** avec $g(x) = (xf(x))'$.]

4. *Application aux nombres premiers.* On note $(p_n)_{n \geq 1}$ la suite des nombres premiers ($p_1 = 2$, $p_2 = 3$,...) et $\pi(x)$ le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux au réel x ; ainsi $\pi(p_n) = n$. On admettra l'équivalent pour $x \to \infty$

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}$$

(théorème des nombres premiers).

a. Montrer que $p_n \sim n \ln n$ quand $n \to \infty$.

b. En déduire un équivalent, lorsque $x \to \infty$, de la moyenne des nombres premiers $p_1, \dots, p_n$ qui sont inférieurs ou égaux à x :

$$\frac{1}{n}(p_1 + \cdots + p_n) \sim \frac{x}{2}\ .$$

c. Montrer de même que

$$\frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_n} \sim \ln(\ln x)\ .$$

Références.

Pour **1** à **3** : Dieudonné, *Calcul infinitésimal*, p.93-104.

Pour **4.a** : Hardy and Wright, *An introduction to the theory of numbers*, p.10.