Agrégation Analyse (F. Rouvière) **6.10.98**

CONSTANTE D'EULER, ÉTUDE DE LIMITE

1. Constante d'Euler

Pour $n \geq 2$ on note

$$S(n) = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \ln n \ .$$

a. Montrer l'existence de $\lim_{n\to\infty} S(n)$, notée γ et appelée *constante d'Euler*, avec $0 < \gamma < 1$.
b. Établir l'inégalité $0 < \gamma - S(n) < 1/2(n-1)$.
c. Donner un équivalent de $\gamma - S(n)$ quand $n \to \infty$.
d. Vérifier l'égalité

$$S(2n) - S(n) = \int_0^1 \frac{x^{2n-1}}{1+x} dx \ .$$

[On pourra considérer la fraction $(1 + x^{2n-1})/(1 + x)$.]
e. En déduire

$$\gamma = \sum_{p=1}^{\infty} I_p \ , \text{ avec } I_p = \int_0^1 \frac{x^{2^p-1}}{1+x} dx \ ,$$

et finalement

$$\gamma = \frac{1}{2} + \sum_{p\geq 1} \sum_{q \geq 1} \frac{q!}{2^{p+q+1}(2^p+1)(2^p+2)\cdots(2^p+q)} \ .$$

[On pourra utiliser la série $\sum_{q=0}^{\infty} (1-x)^q/2^{q+1}$.] Quel intérêt peut avoir ce résultat ?

2. Recherche de limite

On étudie la suite de terme général $x_n = \sqrt[n]{|\sin n\pi\alpha|}$, où α est un réel donné.
a. On prend d'abord $\alpha = \sqrt{2}$. Établir l'inégalité

$$\left| \sqrt{2} - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{1}{4q^2}$$

pour tous $p, q \in \mathbb{Z}$, avec $q \neq 0$. [On pourra multiplier par $\sqrt{2} + \frac{p}{q}$.]
b. Déduire de a (avec $\alpha = \sqrt{2}$) que

$$x_n \geq \frac{1}{\sqrt[n]{2n}}$$

et que $\lim x_n = 1$.
c. Montrer que l'étude de **a** et **b** se généralise à tout nombre α irrationnel et *algébrique*, i.e. racine d'une équation polynomiale irréductible, de degré ≥ 2, à coefficients entiers :

$$a_k X^k + a_{k-1} X^{k-1} + \cdots + a_o = 0 \ .$$

[On établira une inégalité de la forme $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq C|q|^{-k}$, par la formule des accroissements finis appliquée au polynôme ci-dessus.]

Références

Les questions a, b, c du premier exercice sont plus que classiques (voir par exemple Pommellet, *Cours d'analyse*, p.159). Le second est tiré de Zuily et Queffélec, *Éléments d'analyse pour l'agrégation*, p. 8.