Agrégation Analyse (F. Rouvière) **7.12.99**

Deux exercices sur les produits infinis

1. Soient $a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_k$ des nombres réels n'appartenant pas à $\mathbb{N}$. On suppose que

$$a_1 + \cdots + a_k = b_1 + \cdots + b_k \ .$$

a. Etablir la convergence du produit infini

$$P = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(n-a_1)\cdots(n-a_k)}{(n-b_1)\cdots(n-b_k)} \ .$$

[On pourra faire un développement limité du terme général.]
b. Montrer que

$$P = \frac{\Gamma(1-b_1)\cdots\Gamma(1-b_k)}{\Gamma(1-a_1)\cdots\Gamma(1-a_k)} \ .$$

[Indication : $n - a = \Gamma(n+1-a)/\Gamma(n-a)$; on rappelle que, pour tout x réel, on a $\Gamma(n+x) \sim \Gamma(n)n^x$ pour $n \to \infty$.]

2. Pour $z \in \mathbb{C}$ on note $E_1(z) = 1 - z$ et, pour $n \geq 2$,

$$E_n(z) = (1-z)\exp\left(z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^{n-1}}{n-1}\right) \ .$$

a. Calculer $E_n'(z)$ et montrer que cette fonction admet un développement de la forme

$$-E_n'(z) = \sum_{k=n-1}^{\infty} a_k z^k \ ,$$

avec des coefficients $a_k \geq 0$ (qu'on ne demande pas de calculer!).
b. En intégrant, en déduire l'inégalité

$$|1 - E_n(z)| \leq |z|^n \text{ pour } |z| \leq 1 \ , \ n \geq 1 \ .$$

[On pourra raisonner sur la fonction $\varphi(z) = (1 - E_n(z))/z^n$.]
c. Soit $(z_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres complexes non nuls, avec $|z_n| \to \infty$ si $n \to \infty$. Montrer que le produit infini

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E_n\left(\frac{z}{z_n}\right)$$

converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}$, et définit une fonction entière. Quels sont les zéros de f ?

Références.
1. Dieudonné, *Calcul infinitésimal*, Exercice 8 du chapitre IX, p.322.
2. Rudin, *Analyse réelle et complexe*, §15.7-15.9.